MAZE EDUCATIONAL GROUP
ilo
SINCE 1392



ویژهٔ آزمون
۱۵ آبان ۱۴۰۵

معجزهٔ شب آزمون

یازدهم ریاضی

SanjeshCloud

MAZE EDUCATIONAL GROUP
ilo
SINCE 1392

معجزهٔ شب آزمون ilo

دو هفته درس، یک جـزوه جمع‌بندی!

شـــب آزمونه و نمی‌دونی این‌همه مطلب رو چطور مرور کنی؟
ما مباحث هر دو هفته رو توی یک جـزوه بـرات جمع‌بندی کردیم تا با ذهن مرتب‌تر و خیال راحت‌تر آزمون بدی.

خوب خوندی؟ جمع بـــــندیش کن!

مطالبی رو که خوندی مرور کن، نکته‌ها رو به هم وصـــل کن و آموخته‌هات رو تثبیت کن.

کم خوندی؟ فرصت مرور رو از دست نده!

خونده‌هات رو منظم کن و سراغ نکته‌هایی برو که فرصت نکردی مرورشون کنی.

هنوز شروع نکردی؟ از همین جا شروع کن!

با مرور مباحث و نکته‌های اصلی، قدم اول رو برای جبران عقب‌افتادگی بردار و آماده‌تر سر جلسه برو.

هرچقدر خوندی، وقتشـــــــه یک قدم آماده‌تر بشـــــی؛ با معجزه شب آزمون مـــــــــاز.

SanjeshCloud

معجزهٔ شب آزمون

بودجه‌بندی آزمون

حسابان ۱

جبر و معادله (مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی، معادلات درجه دوم، معادلات گویا و گنگ، قدرمطلق و ویژگی‌های آن)
صفحه‌های ۱ تا ۲۸

آمار و احتمال

آشنایی با مبانی ریاضیات
(کل درس ۱: آشنایی با منطق ریاضی)
صفحه‌های ۱ تا ۱۵

هندسهٔ ۲

دایره (مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره، رابطه‌های طولی در دایره، رسم مماس بر دایره از نقطه ای خارج دایره، حالت‌های دو دایره نسبت به هم)
صفحه‌های ۹ تا ۲۰

فیزیک ۲

الکتریسیتهٔ ساکن
(تا ابتدای پتانسیل الکتریکی)
صفحه‌های ۱ تا ۲۳

شیمی ۲

قدر هدایای زمینی را بدانیم
(از ابتدای فصل تا قبل از خود را بیازمایید صفحه ۲۴)
صفحه‌های ۱ تا ۲۴

مؤلفین
(ریاضیات: محمد خانگلدی ـ فرهاد فرزامی)
(فیزیک: حامد نبی منصور)
(شیمی: مجتبی محجوب)

SanjeshCloud

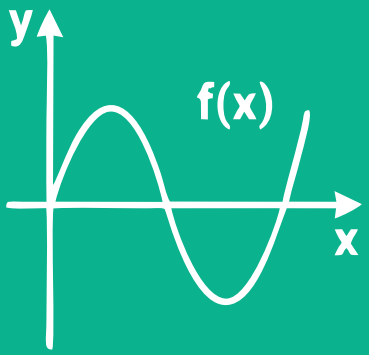
MAZE EDUCATIONAL GROUP
SINCE 1392

ویژهٔ آزمون
۱۵ آبان ۱۴۰۵

ریاضیات

یازدهم ریاضی

معجزهٔ شب آزمون



SanjeshCloud

حسابان

دنبالهٔ حسابی و هندسی در یک نگاه

نوع دنباله	جملهٔ عمومی	نحوهٔ تشخیص	مجموع n جملهٔ اول دنباله	واسطهٔ بین دو عدد a و b
حسابی	$a_n = a_1 + (n-1)d$ جملهٔ اول دنباله: a_1 قدرنسبت دنباله: d	هر جمله با یک عدد ثابت جمع شده و جملهٔ بعدی به دست آمده است.	$S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$ $= \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$	واسطهٔ حسابی a و b $\frac{a+b}{2}$
هندسی	$a_n = a_1 \times q^{n-1}$ جملهٔ اول دنباله: a_1 قدرنسبت دنباله: q $a_1 \neq 0 \quad q \neq 0$	هر جمله در یک عدد ثابت ضرب شده و جملهٔ بعدی به دست آمده است.	$S_n = a_1(\frac{1-q^n}{1-q})$ $= a_1(\frac{q^n-1}{q-1})(q \neq 1)$	واسطهٔ هندسی a و b $\pm\sqrt{ab}$ $(ab \geq 0)$

مثال مجموع تمام اعداد طبیعی دورقمی مضرب ۷، کدام است؟ (ریاضی ۹۸)

۱) ۷۲۱ ۲) ۷۲۸ ۳) ۷۳۵ ۴) ۷۴۲

گزینهٔ «۲»

اعداد دورقمی مضرب ۷ عبارت‌اند از: $\{14,21,28,35,\ldots,98\}$ که تشکیل یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $a_1 = 14$ و قدرنسبت $d = 7$ می‌دهند؛ پس ابتدا تعداد این اعداد را مشخص می‌کنیم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 98 = 14 + 7(n-1) \Rightarrow 7(n-1) = 84$$
$$\Rightarrow n-1 = 12 \Rightarrow n = 13$$

تعداد این اعداد ۱۳ عدد است؛ بنابراین مجموع آن‌ها برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{13} = \frac{13}{2}(14 + 98) = \frac{13 \times 112}{2} = 728$$

مثال **اگر مجموع ۹ جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت صحیح، ۷۳ برابر مجموع ۳ جملهٔ اول باشد، جملهٔ سوم این دنباله چند برابر جملهٔ اول آن است؟**

(ریاضی ـ اردیبهشت‌ماه ۱۴۰۴)

۱) ۳ ۲) ۴
۳) ۸ ۴) ۹

گزینهٔ «۲»

$$S_9 = 73 S_3 \Rightarrow \frac{a_1(q^9 - 1)}{q - 1} = 73 \times \frac{a_1(q^3 - 1)}{q - 1}$$

$$\Rightarrow q^9 - 1 = 73(q^3 - 1) \Rightarrow (q^3 - 1)(q^6 + q^3 + 1) = 73(q^3 - 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q^3 - 1 = 0 \Rightarrow q = 1 \times \\ q^6 + q^3 + 1 = 73 \Rightarrow q^6 + q^3 - 72 = 0 \\ \Rightarrow (q^3 + 9)(q^3 - 8) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} q^3 = -9 \Rightarrow q = \sqrt[3]{-9} \times \text{ قدرنسبت عددی صحیح است} \\ q^3 = 8 \Rightarrow q = 2 \checkmark \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین نسبت جملهٔ سوم به جملهٔ اول برابر است با:

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{a_1 q^2}{a_1} = q^2 = 2^2 = 4$$

مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه ۲

بدون حل معادله می‌توان **مجموع** و **حاصل‌ضرب** ریشه‌ها را به دست آورد. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ باشند، آنگاه:

$\alpha\beta = P = \frac{c}{a}$	$\alpha + \beta = S = -\frac{b}{a}$

$$4x^2 - 3x - 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = S = \frac{-b}{a} \Rightarrow S = -\frac{-3}{4} = \frac{3}{4} \\ \alpha\beta = P = \frac{c}{a} \Rightarrow P = \frac{-7}{4} \end{cases}$$

مثال **اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2 + 2(a+1)x + 2a - 1 = 0$ باشند، به‌ازای کدام مقدار a، به‌ترتیب سه عدد α، a و β تشکیل دنبالهٔ هندسی می‌دهند؟**

(ریاضی ـ خارج ۱۴۰۱)

۱) -2 ۲) ۲ ۳) -1 ۴) ۱

گزینهٔ «۴»

$$a^۲=\alpha\beta\Rightarrow a^۲=۲a-۱\Rightarrow a^۲-۲a+۱=۰\Rightarrow a=۱$$

روابط بین ریشه‌های حقیقی معادلهٔ درجهٔ دوم

مجموع مجذور ریشه‌ها یا مجموع مربعات ریشه‌ها	$\alpha^۲+\beta^۲=S^۲-۲P$
مجموع مکعب ریشه‌ها	$\alpha^۳+\beta^۳=S^۳-۳PS$
اختلاف ریشه‌ها یا فاصلهٔ بین ریشه‌ها یا تفاضل ریشه‌ها یا طول پاره‌خطی که سهمی روی محور xها ایجاد می‌کند	$\lvert\alpha-\beta\rvert=\frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a\rvert}=\sqrt{S^۲-۴P}$

نکته

در **عبارتی** که به‌صورت متقارن برحسب α و β بیان نشده، دقت داشته باشید که α و β در معادله صدق می‌کنند.

مثال **اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲-۲x-۳=۰$ باشند. حاصل $(\alpha^۲-۱)\beta$ را به‌دست آورید.**

پاسخ مثال

$$۳\alpha^۲-۲\alpha-۳=۰\Rightarrow ۳\alpha^۲-۳=۲\alpha\Rightarrow \alpha^۲-۱=\frac{۲}{۳}\alpha$$

$$(\alpha^۲-۱)\beta=\frac{۲}{۳}\alpha\beta=\frac{۲}{۳}P=-\frac{۲}{۳}$$

مثال **اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲-۱۲x-a=۰$ و $۲\alpha^۲+\beta^۲-۴\alpha=۷$ باشد، مقدار a چند برابر ریشهٔ بزرگ‌تر معادله است؟** (ریاضی. خارج ۱۴۰۴)

۱) ۳ ۲) -۳

۳) ۹ ۴) -۹

گزینهٔ «۲»

$$S=\alpha+\beta=-\frac{-۱۲}{۳}=۴$$

$$P=\alpha\beta=\frac{-a}{۳}$$

$$۲\alpha^۲+\beta^۲-۴\alpha=۷\Rightarrow \underbrace{(\alpha^۲+\beta^۲)}_{S^۲-۲P}+\underbrace{(\alpha^۲-۴\alpha)}_{\frac{a}{۳}}=۷$$

خواست باشه!

$$۳\alpha^۲-۱۲\alpha-a=۰\Rightarrow \alpha^۲-۴\alpha=\frac{a}{۳}$$

خواهیم داشت:

$$S^۲-۲P+\frac{a}{۳}=۷\Rightarrow ۱۶+\frac{۲a}{۳}+\frac{a}{۳}=۷\Rightarrow a=-۹$$

SanjeshCloud

درنتیجه:

$$۳x^۲-۱۲x+۹=۰\Rightarrow x^۲-۴x+۳=۰\Rightarrow\begin{cases}\alpha=۱\\ \beta=۳\end{cases}\Rightarrow\frac{a}{\beta}=\frac{-۹}{۳}=-۳$$

تشکیل معادلهٔ درجه ۲

گاهی برای حل یک مسئله، لازم است برای آن معادله‌ای بنویسیم و سپس آن معادله را حل کنیم.

$$\xrightarrow[\alpha\beta=P]{\alpha+\beta=S} x^۲-Sx+P=۰ \text{ یا } a(x^۲-Sx+P)=۰\quad (a\neq۰)$$

مثال معادلهٔ درجهٔ دومی که ریشه‌های آن $\frac{۷+\sqrt{۳}}{۲}$ و $\frac{۷-\sqrt{۳}}{۲}$ باشد، کدام است؟

پاسخ مثال

$$S=\frac{۷-\sqrt{۳}}{۲}+\frac{۷+\sqrt{۳}}{۲}=۷$$

$$P=(\frac{۷-\sqrt{۳}}{۲})(\frac{۷+\sqrt{۳}}{۲})=\frac{۴۹-۳}{۴}=\frac{۲۳}{۲}$$

بنابراین:

$$x^۲-Sx+P=۰\Rightarrow x^۲-۷x+\frac{۲۳}{۲}=۰ \text{ یا } ۲x^۲-۱۴x+۲۳=۰$$

تابع درجهٔ دوم (سهمی)

$$f(x)=a(x-x_s)^۲+y_s$$

$\begin{cases}x_s=\text{ریشهٔ داخل پرانتز}\\ y_s=\text{عدد بیرون پرانتز}\end{cases}$

$$f(x)=ax^۲+bx+c$$

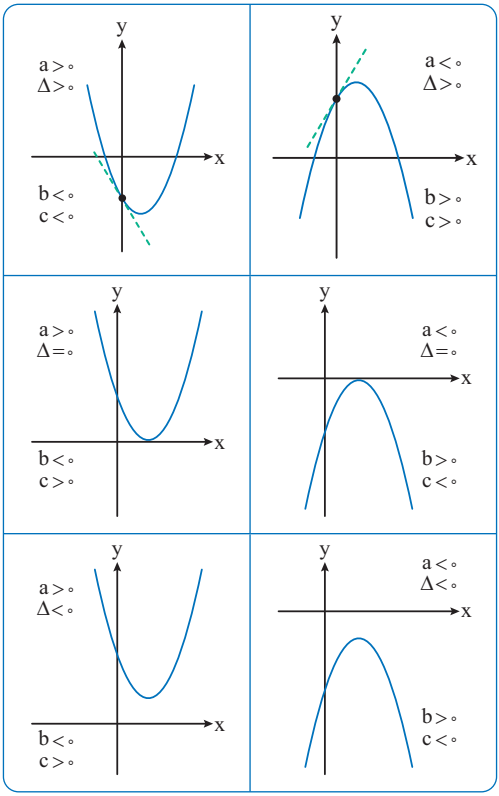
$\begin{cases}x_s=\frac{-b}{۲a}=\text{محور تقارن سهمی}\\ y_s=f(x_s)=\frac{-\Delta}{۴a}\end{cases}$

منظور از مقدار ماکزیمم سهمی یا مقدار مینیمم سهمی، عرض رأس سهمی (y_s) است.

تعداد صفرهای تابع درجهٔ دوم $y=ax^۲+bx+c$ را به کمک Δ می‌توان تشخیص داد.

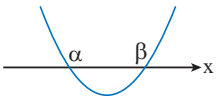
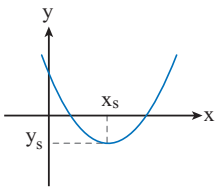
مشخص کردن علامت a، b و c از روی نمودار تابع درجهٔ دوم		
a	c	b
جهت دهانهٔ سهمی را نشان می‌دهد. رو به بالا $\rightarrow a>0$ رو به پایین $\rightarrow a<0$	محل برخورد با محور yها	شیب خط مماس بر سهمی در محل برخورد با محور yها

انواع نمودار تابع درجه دو



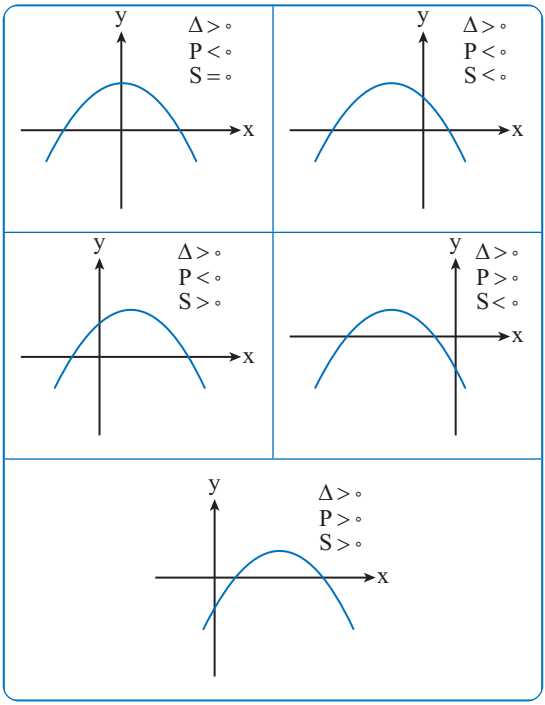
ویژگی نقاط هم‌عرض در سهمی	
ریشه‌های سهمی	طول نقطه‌های با عرض یکسان
$x_s=\frac{\alpha+\beta}{2}$	$x_s=\frac{x_1+x_2}{2}$

نوشتن معادلهٔ سهمی از روی نمودار

اگر دو ریشه را داشته باشیم	اگر رأس سهمی را داشته باشیم	اگر سه نقطه از سهمی را داشته باشیم
$y=a(x^2-Sx+p)$  $S=\alpha+\beta$ $P=\alpha\times\beta$	$y=a(x-x_s)^2+y_s$ 	$y=ax^2+bx+c$ نقاط داده‌شده را در معادلهٔ بالا جای‌گذاری کرده و با حل دستگاه، ضرایب را پیدا می‌کنیم.

برای بررسی تشخیص علامت ریشه‌های احتمالی $f(x)=0$ می‌توانیم از S و P کمک بگیریم.

در شکل‌های زیر، از روی نمودار، علامت Δ، S و P مشخص شده است.



مثال **به‌ازای کدام مجموعه مقادیر a، نمودار تابع $f(x)=ax^2+(a+3)x-1$، محور xها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟**

۱) $a<-9$ ۲) $a<-3$

۳) $a>-1$ ۴) $-3<a<0$

گزینهٔ «۱»

$$\begin{cases}\Delta>0\Rightarrow(a+3)^2+4a>0\Rightarrow a^2+10a+9>0\Rightarrow \begin{cases}a<-9\\a>-1\end{cases} \quad (1)\\ P>0\Rightarrow\dfrac{-1}{a}>0\Rightarrow a<0 \quad (2)\\ S<0\Rightarrow\dfrac{-(a+3)}{a}<0\Rightarrow -(a+3)>0\Rightarrow a+3<0\Rightarrow a<-3 \quad (3)\end{cases}$$

$$(1)\cap(2)\cap(3)\Rightarrow a<-9$$

صفرهای تابع درجهٔ سوم

اگر بدانیم یکی از صفرهای تابع درجهٔ سه $p(x)$، برابر $x=a$ است ابتدا $p(x)$ را بر $x-a$ تقسیم می‌کنیم. سپس صفرهای خارج قسمت را به دست می‌آوریم.

مثال **اگر $x=2$ یکی از صفرهای تابع $p(x)=x^3-x^2-4x+4$ باشد، سایر صفرهای تابع را در صورت وجود بیابید.**

از آنجا که $x=2$ یک صفر تابع $p(x)$ است می‌توان نشان داد که $p(x)$ عاملی به‌صورت $x-2$ دارد، پس با تقسیم $p(x)$ بر $x-2$ عامل دیگر $p(x)$ را می‌یابیم.

$$\begin{array}{r|l} x^3-x^2-4x+4 & x-2 \\ \hline x^3-2x^2 & x^2+x-2 \\ \hline x^2-4x+4 & \\ x^2-2x & \\ \hline -2x+4 & \\ -2x+4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

می‌توان نوشت $p(x)=(x-2)(x^2+x-2)$. آنگاه از حل معادلهٔ $p(x)=0$ داریم:

$$\begin{cases}x-2=0\Rightarrow x=2\\ x^2+x-2=0\Rightarrow \begin{cases}x=-2\\x=1\end{cases}\end{cases}$$

صفرهای تابع p برابر $1,2,-2$ می‌باشند.

روش تغییر متغیر برای حل معادلات درجات بالاتر

برخی معادله‌های غیر درجه دو، با تغییر متغیر، قابل تبدیل به معادلهٔ درجه دو هستند.

$$۲x^۴ - ۷x^۲ - ۹ = ۰ \xrightarrow{x^۲=t} ۲t^۲ - ۷t - ۹ = ۰$$

$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} t = -۱ \xrightarrow{x^۲=t} x^۲ = -۱ \ \times \\ t = -\frac{-۹}{۲} \xrightarrow{x^۲=t} x^۲ = \frac{۹}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۳}{\sqrt{۲}} \\ x = -\frac{۳}{\sqrt{۲}} \end{cases} \end{cases}$$

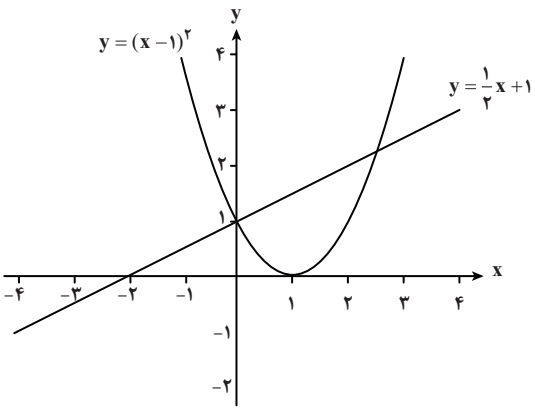
روش هندسی حل معادلات

اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند، طول نقاط تلاقی این دو تابع جواب‌های معادلهٔ $f(x) = g(x)$ است.

تعداد جواب‌های معادله و مقدار تقریبی جواب‌ها به روش هندسی (نموداری) حل معادلات به دست می‌آید.

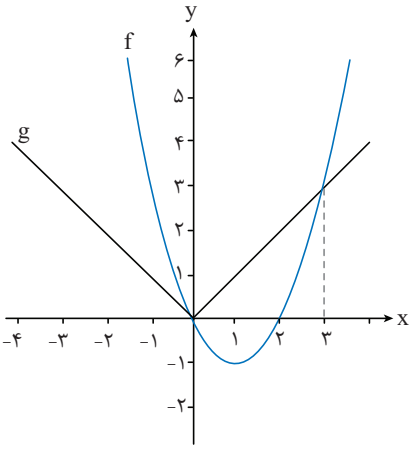
تعداد و مقدار ریشه‌های معادلهٔ $(x-۱)^۲ = \frac{۱}{۲}x + ۱$ را به دست آورید.

$$x^۲ - ۲x + ۱ = \frac{۱}{۲}x + ۱ \Rightarrow x^۲ - \frac{۵}{۲}x = ۰ \Rightarrow x(x - \frac{۵}{۲}) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = \frac{۵}{۲} \end{cases}$$



مثال به روش هندسی معادلهٔ $|x| = x^2 - 2x$ را حل کنید.

پاسخ مثال با فرض $f(x) = x^2 - 2x$ و $g(x) = |x|$، نمودار این دو تابع را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودارهای دو تابع طول نقاط تلاقی دو نمودار عبارت‌اند از: $x = 0, x = 3$ که جواب‌های معادلهٔ $|x| = x^2 - 2x$ می‌باشند.

حل معادلات گویا

مخرج‌ها رو به عوامل اول تجزیه می‌کنیم. کسرهای هر طرف تساوی رو با **مخرج مشترک** گرفتن ساده کرده و بعد **طرفین‌وسطین** می‌کنیم.

خواست باشه! حتماً آخرش جواب‌های قابل قبول و غیرقابل قبول را مشخص کنید.

خطایابی! دانش‌آموزی معادلهٔ $\frac{1}{x-1} = \frac{x+2}{x^2-1}$ را به شکل زیر حل کرده، اشکال حل چیست؟

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+2}{x^2-1} \Rightarrow x^2 - 1 = (x+2)(x-1)$$

$$\Rightarrow x^2 - 1 = x^2 + x - 2 \Rightarrow -1 = x - 2 \Rightarrow x = 1$$

ساده‌سازی در حل معادلات گویا

اگه لازم شد، می‌توانیم قبل از طرفین‌وسطین، صورت و مخرج را ساده کنیم.

خط زدن مخرج هیچ مشکلی ندارد.	اگر صورت‌ها را ساده کردیم، عبارت ساده‌شده را جزء جواب حساب می‌کنیم.
$\frac{۲}{x^۲}=\frac{۱}{x^۲+x}\Rightarrow\frac{۲}{x\cancel{x}}=\frac{۱}{\cancel{x}(x+۱)}$ $\Rightarrow\frac{۲}{x}=\frac{۱}{x+۱}$ طرفین‌وسطین $\Rightarrow ۲(x+۱)=x$ $\Rightarrow x=-۲$ ✓	$\frac{x+۱}{۳x+۱}=\frac{x+۱}{x-۳}$ $\Rightarrow\frac{\overset{۱}{\cancel{x+۱}}}{۳x+۱}=\frac{\overset{۱}{\cancel{x+۱}}}{x-۳}$ $\Rightarrow\begin{cases}x+۱=۰\Rightarrow x=-۱ \checkmark\\ ۳x+۱=x-۳\Rightarrow ۲x=-۴\\ \Rightarrow x=-۲ \checkmark\end{cases}$

کار مشترک

A	t_A	$\frac{۱}{t_A}+\frac{۱}{t_B}=\frac{۱}{t_{AB}}$
B	t_B	
A و B باهم	t_{AB}	

مثال **علی کاری را در مدت‌زمان t و رضا همان کار را در مدت‌زمان ۳t انجام می‌دهد. اگر هر دو باهم کار کنند، این کار در ۱۵ ساعت تمام می‌شود. مقدار t چند ساعت است؟**

۱) ۲۰ ۲) ۱۸ ۳) ۲۱ ۴) ۲۴

گزینهٔ «۱»

$$\frac{۱}{t}+\frac{۱}{۳t}=\frac{۱}{۱۵}\Rightarrow\frac{۴}{۳t}=\frac{۱}{۱۵}\Rightarrow t=۲۰$$

سرعت‌های متفاوت در مسیر رفت و برگشت

مثال **متحرکی مسیر ۹۰ کیلومتری را با سرعت v طی می‌کند. در مسیر برگشت، سرعت متحرک ۱ کیلومتر بر ساعت افزایش یافته و زمان برگشت، ۱ ساعت کمتر از زمان رفت می‌شود. مجموع زمان رفت و برگشت این متحرک، چند ساعت است؟**

۱) ۱۸ ۲) ۱۸/۵ ۳) ۱۹ ۴) ۱۹/۵

گزینهٔ «۳»

$$\left.\begin{aligned}t_۱&=\frac{۹۰}{v}\\ t_۲&=\frac{۹۰}{v+۱}\end{aligned}\right\}\Rightarrow t_۱-t_۲=۱\Rightarrow\frac{۹۰}{v}-\frac{۹۰}{v+۱}=۱\Rightarrow\frac{۹۰}{v(v+۱)}=۱$$

$$\Rightarrow v^2+v-90=0 \Rightarrow (v+10)(v-9)=0 \Rightarrow \begin{cases} v=-10 \text{ غ ق ق} \\ v=9 \checkmark \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1=\frac{90}{9}=10 \\ t_2=\frac{90}{10}=9 \end{cases} \Rightarrow t_1+t_2=19$$

غلظت محلول

$$\text{غلظت}=\frac{\text{حل‌شونده}}{\text{کل محلول}} \Rightarrow \text{حل‌شونده}=\text{غلظت}\times\text{کل محلول}$$

مثال **۳۰ کیلوگرم رنگ با غلظت ۴۰ درصد با ۲۰ کیلوگرم رنگ از همان نوع با غلظت ۶۰ درصد مخلوط شده‌اند. غلظت محلول حاصل چند درصد است؟**

۱) ۴۸ ۲) ۲۴

۳) ۶۸ ۴) ۳۸

گزینهٔ «۱»

$$\left.\begin{aligned} \text{حل‌شوندهٔ ۱}&=\frac{40}{100}\times 30=12\text{kg} \\ \text{حل‌شوندهٔ ۲}&=\frac{60}{100}\times 20=12\text{kg} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{غلظت محلول حاصل}=\frac{12+12}{50}=0/48$$

حل معادلات رادیکالی

۱ جملات را طوری در طرفین تساوی جابه‌جا می‌کنیم که یک عبارت رادیکالی به‌تنهایی یک طرف تساوی قرار گیرد.

۲ دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم **(برای از بین بردن رادیکال)** و در صورت لزوم با تکرار این عمل، معادله را از شکل رادیکالی خارج می‌کنیم.

حواست باشه! در معادلات گنگ علاوه بر شرط دامنه، شرط قبل از به توان ۲ رساندن لحاظ شود.

مثال

$$x-2=\sqrt{x} \xrightarrow[x\geq 2]{x\geq 0} x^2-4x+4=x \Rightarrow x^2-5x+4=0$$

$$(x-1)(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \text{ غ ق ق} \\ x=4 \checkmark \end{cases}$$

دو یا سه رادیکال

۱ در این سؤالات ابتدا دامنهٔ رادیکال‌ها را بررسی می‌کنیم.

اگر دامنه، یک یا چند عدد بود، چک می‌کنیم آن عدد جواب می‌دهد یا خیر.

$$\sqrt{\bigcirc} \xrightarrow{D} \bigcirc \geq 0$$

اگر دامنه بازه بود، یک رادیکال را سمت راست معادله نگه داشته و یک رادیکال را سمت چپ می‌بریم و با توان‌رسانی مراحل حل معادله را انجام می‌دهیم.

۲ دقت کنید حتماً جواب‌ها را چک کنید تا در مرحلهٔ ۲ روبه‌روی رادیکال منفی نشود.

مثال **کدام گزینه در مورد ریشه(های) معادلهٔ $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x+2}=1$ درست است؟**

۱) دو ریشهٔ حقیقی مثبت دارد.

۲) فقط یک ریشهٔ حقیقی منفی دارد.

۳) فقط یک ریشهٔ حقیقی مثبت دارد.

۴) ریشهٔ حقیقی ندارد.

گزینهٔ «۳»

$$D=[\frac{3}{2},+\infty)$$

$$\sqrt{2x-3}=\sqrt{x+2}+1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 2x-3=x+2+1+2\sqrt{x+2}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x+2}=x-6 \xrightarrow{x\geq 6} 4(x+2)=x^2-12x+36$$

$$\Rightarrow x^2-16x+28=0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x-14)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \text{ غ ق ق} \\ x=14 \end{cases}$$

مستطیل طلایی

مستطیل طلایی: اگر مستطیلی با طول x و عرض y داشته باشیم که در آن رابطهٔ $\frac{x}{y}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ برقرار باشد، این مستطیل را طلایی می‌نامیم، در مستطیل طلایی:

$$\frac{x+y}{x}=\frac{x}{y}$$

عدد طلایی: عدد $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\simeq 1/618$ را **عدد طلایی** می‌گویند.

مثال در یک مستطیل طلایی، مساحت برابر $۲\sqrt{۵}$ است. طول قطر این مستطیل چقدر است؟

۱) $\frac{۴}{۵}\sqrt{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۲}\sqrt{۵}$

۳) $\sqrt{۱۰}$ ۴) $\sqrt{۱۵}$

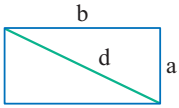
گزینهٔ «۳»

با توجه به فرض مسئله، خواهیم داشت:

$$b=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}a$$

$$ab=۲\sqrt{۵}\Rightarrow a\times\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}a=۲\sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow a^۲=\frac{۴\sqrt{۵}}{۱+\sqrt{۵}}=\frac{۴\sqrt{۵}(\sqrt{۵}-۱)}{۴}\Rightarrow a^۲=۵-\sqrt{۵}$$



بنابراین طول قطر مستطیل برابر است با:

$$d^۲=a^۲+b^۲=a^۲(۱+(\frac{b}{a})^۲)=(۵-\sqrt{۵})(۱+(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲})^۲)$$

$$=(۵-\sqrt{۵})(\frac{۵+\sqrt{۵}}{۲})=\frac{۲۵-۵}{۲}=۱۰\Rightarrow d=\sqrt{۱۰}$$

قدرمطلق

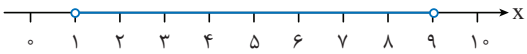
$$\sqrt{x^۲}=|x|=\begin{cases}x & x\geq ۰\\ -x & x<۰\end{cases}$$

معادلات قدرمطلقی

$\|x-۱\|=۳\Rightarrow\begin{cases}x-۱=۳\Rightarrow x=۴\\ x-۱=-۳\Rightarrow x=-۲\end{cases}$	$\|x\|=a\xrightarrow{a\geq ۰}\begin{cases}x=a\\ x=-a\end{cases}$
$\|۲x-۳\|=\|x\|$ $\Rightarrow\begin{cases}۲x-۳=x\Rightarrow x=۳\\ ۲x-۳=-x\Rightarrow ۳x=۳\Rightarrow x=۱\end{cases}$	$\|x\|=\|a\|\Leftrightarrow\begin{cases}x=a\\ x=-a\end{cases}$

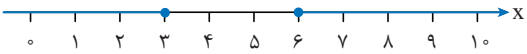
نامعادلات قدرمطلقی

$$|x-۵|<۴ \Rightarrow -۴<x-۵<۴ \xrightarrow{+۵} ۱<x<۹ \Rightarrow (۱,۹)$$



$$|x-\frac{۹}{۲}|\geq \frac{۳}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x-\frac{۹}{۲}\geq \frac{۳}{۲} \Rightarrow x\geq ۶ \\ x-\frac{۹}{۲}\leq -\frac{۳}{۲} \Rightarrow x\leq ۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow (-\infty,۳]\cup[۶,+\infty) \text{ یا } \mathbb{R}-(۳,۶)$$



ویژگی‌های قدرمطلق

۱) $|x|\geq ۰$

۲) $|x|=|-x|$

۳) $|x|=a \Rightarrow x=\pm a \quad (a>۰)$

۴) $|a+b|\leq |a|+|b|$

۵) $|a+b|=|a|+|b| \Leftrightarrow ab\geq ۰$

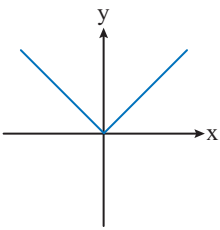
۶) $|a+b|<|a|+|b| \Leftrightarrow ab<۰$

۷) $|x|\leq a \Leftrightarrow -a\leq x\leq a \Leftrightarrow x^۲\leq a^۲ \quad (a>۰)$

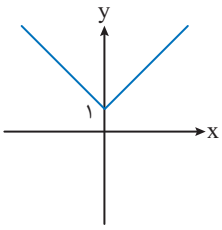
۸) $|x|\geq a \Leftrightarrow x\leq -a$ یا $x\geq a \Leftrightarrow x^۲\geq a^۲ \quad (a>۰)$

رسم تابع قدرمطلقی با انتقال

$y = |x|$

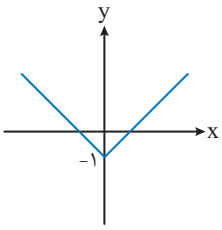


$y = |x| + ۱$



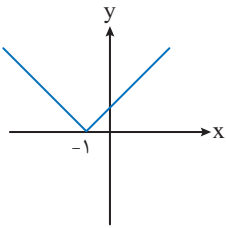
یک واحد به **بالا**

$y = |x| - ۱$



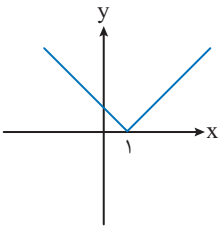
یک واحد به **پایین**

$y = |x+۱|$



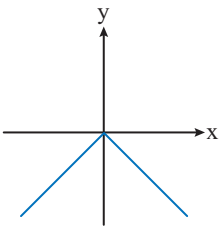
یک واحد به **چپ**

$y = |x-۱|$



یک واحد به **راست**

$y = -|x|$



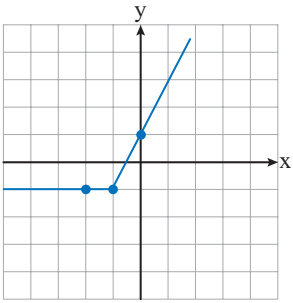
مجموع یا تفاضل قدرمطلق‌های درجه یک

۱ ریشه‌های داخل قدرمطلق (**نقاط زاویه‌دار**) را به دست می‌آوریم.
۲ نقاط به‌دست‌آمده را به هم وصل می‌کنیم.
۳ یک عدد دلخواه پس از آخرین نقطهٔ زاویه‌دار بزرگ‌تر و یک عدد دلخواه قبل از نقطهٔ زاویه‌دار کوچک‌تر مشخص کرده و نقاط زاویه‌دار اول و آخر را به آن وصل می‌کنیم.

$$y=|x+1|+x$$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

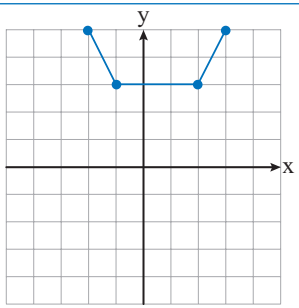
x	−۲	−۱	۰
y	−۱	−۱	۱



$$y=|x-2|+|x+1|$$

$$\begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \end{cases}$$

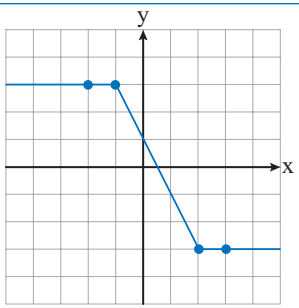
x	−۲	−۱	۲	۳
y	۵	۳	۳	۵



$$y=|x-2|-|x+1|$$

$$\begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \end{cases}$$

x	−۲	−۱	۲	۳
y	۳	۳	−۳	−۳

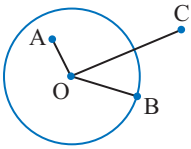


هندسه ۲

مفاهیم اولیه در دایره

دایره: مجموعهٔ نقاطی از صفحه که از یک نقطهٔ ثابت به یک فاصلهٔ ثابت باشد. دایره به مرکز O و شعاع R را با نماد $C(O,R)$ نمایش می‌دهیم.

وضعیت نسبی نقطه و دایره: فاصلهٔ مرکز دایره تا نقطه را محاسبه می‌کنیم. سه حالت داریم:



A داخل دایره است. $\leftrightarrow OA < R$

B روی دایره است. $\leftrightarrow OB = R$

C خارج دایره است. $\leftrightarrow OC > R$

مثال **اگر فاصلهٔ نقاط M و N تا مرکز دایره $C(O,1)$ ریشه‌های معادلهٔ $3x^2 - 5x + 2 = 0$ باشند، این نقاط نسبت به دایره چه وضعیتی دارند؟**

۱) هر دو داخل دایره است.

۲) یکی روی دایره و یکی خارج دایره است.

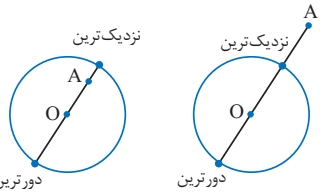
۳) یکی روی دایره و یکی داخل دایره است.

۴) یکی داخل دایره و یکی خارج دایره است.

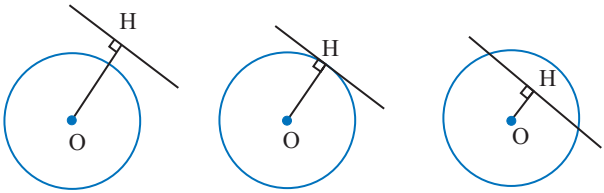
گزینهٔ «۳»

$$3x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 = R & \text{روی دایره} \\ x = \frac{2}{3} < R & \text{داخل دایره} \end{cases}$$

نزدیک‌ترین و دورترین نقاط نسبت به دایره: اگر نقطه‌ای داخل یا خارج قرار داشته باشد، آن را به مرکز دایره وصل کرده و امتداد می‌دهیم. نقاط برخورد با دایره دورترین و نزدیک‌ترین نقاط هستند.



وضعیت نسبی خط و دایره: فاصلهٔ مرکز دایره تا خط را محاسبه می‌کنیم. سه حالت داریم:



خط و دایره متقاطع‌اند.	خط بر دایره مماس است.	خط خارج دایره است.
$OH < R$	$OH = R$	$OH > R$

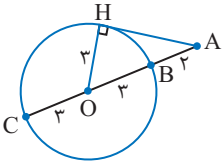
قضیه: اگر خط بر دایره مماس باشد (یک نقطهٔ تماس داشته باشند)، شعاع وارد بر خط مماس، در نقطهٔ تماس بر این خط عمود است.

مثال **فاصلهٔ دورترین و نزدیک‌ترین نقاط دایره تا نقطهٔ A که خارج دایره می‌باشد، به‌ترتیب ۸ و ۲ است. طول مماس رسم‌شده از نقطهٔ A بر دایره کدام است؟**

۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۵ ۴) ۶

گزینهٔ «۲»

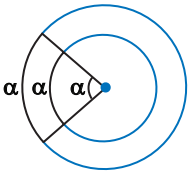


$$AC - AB = 2R = 6 \Rightarrow R = 3$$
$$\overset{\Delta}{OAH}: 5^2 = 3^2 + AH^2 \Rightarrow AH = 4$$

زاویهٔ مرکزی: زاویه‌ای که رأس آن مرکز دایره و ضلع‌های آن، شعاع‌های دایره باشند.

✓ اندازهٔ زاویهٔ مرکزی برابر اندازهٔ کمان روبه‌رو با آن است.

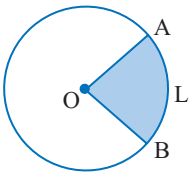
✓ کمان‌های دایره‌های مختلف می‌توانند اندازه‌های برابر و طول‌های متفاوت داشته باشند. برای تبدیل اندازه و طول یک کمان از تساوی زیر استفاده می‌کنیم:



$$\frac{\text{اندازهٔ کمان}}{360} = \frac{\text{طول کمان}}{\text{محیط دایره}}$$

(اندازهٔ کمان برحسب درجه است.)

قطاع دایره: ناحیه‌ای از درون و روی دایره که به دو شعاع دایره و کمان آن دایره محدود است.

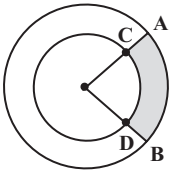


✓ طول کمان AB برابر است با: $L_{AB} = \frac{\pi R \alpha}{۱۸۰}$

✓ مساحت قطاع برابر است با: $S = \frac{\pi R^{۲} \alpha}{۳۶۰}$

(α برحسب درجه است.)

مثال **اگر شعاع‌های دو دایرهٔ هم‌مرکز ۲ و ۴ واحد و طول کمان CD برابر ۴ باشد، مساحت ناحیهٔ رنگی کدام است؟**



۱) ۸ ۲) ۹
۳) ۱۰ ۴) ۱۲

گزینهٔ «۴»

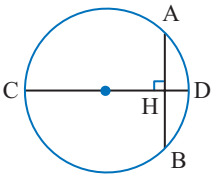
$$L_{CD} = \frac{\pi R \alpha}{۱۸۰} \Rightarrow ۴ = \frac{\pi(۲)\alpha}{۱۸۰} \Rightarrow \pi\alpha = ۳۶۰$$

$$S_{\text{رنگی}} = S_{\text{قطاع بزرگ}} - S_{\text{قطاع کوچک}} = \frac{\pi(۴)^{۲}\alpha}{۳۶۰} - \frac{\pi(۲)^{۲}\alpha}{۳۶۰} = ۱۶ - ۴ = ۱۲$$

وتر: پاره‌خطی که دو نقطهٔ متمایز روی دایره را به هم وصل می‌کند.

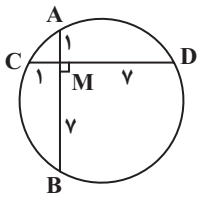
✓ وتری که از مرکز دایره می‌گذرد قطر دایره است. (بزرگ‌ترین وتر دایره)

قضیه: در هر دایره، قطر عمود بر وتر، آن وتر و کمان نظیر آن را نصف می‌کند و برعکس.



$$CD \perp AB \leftrightarrow \begin{cases} AH = HB \\ \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB} \end{cases}$$

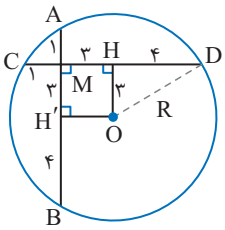
مثال **در شکل زیر، دو وتر AB و CD بر هم عمودند. شعاع دایره کدام است؟**



۱) ۵ ۲) $۲\sqrt{۵}$
۳) ۶ ۴) $۲\sqrt{۶}$

گزینهٔ «۱»

قطر عمود بر وتر، آن وتر را نصف می‌کند؛ درنتیجه:



$$OH' \perp AB \Rightarrow AH' = BH' = ۴ \Rightarrow MH' = ۴ - ۱ = ۳$$

$$OH \perp CD \Rightarrow CH = HD = ۴ \Rightarrow MH = ۴ - ۱ = ۳$$

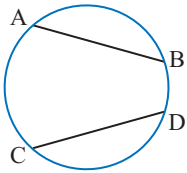
چهارضلعی $OH'MH$ مستطیل است، بنابراین:

$$OH = MH' = ۳$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHD داریم:

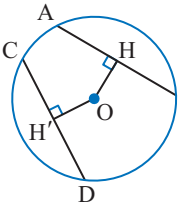
$$R^۲ = ۳^۲ + ۴^۲ \Rightarrow R = ۵$$

قضیه: در یک دایره، اگر دو وتر برابر باشند، کمان‌های نظیر دو وتر نیز برابرند و برعکس.



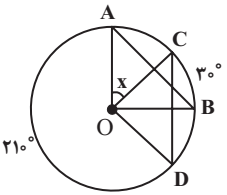
$$AB = CD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

قضیه: در هر دایره، وترهای برابر از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و برعکس.



$$AB = CD \Leftrightarrow OH = OH'$$

مثال **در شکل زیر، دو وتر AB و CD از مرکز دایره به یک فاصله‌اند. مقدار x کدام است؟**



۱) ۳۰°
۲) ۶۰°
۳) ۴۵°
۴) ۲۵°

گزینهٔ «۲»

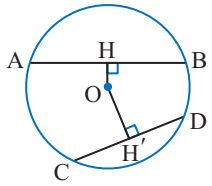
دو وتر AB و CD از مرکز دایره به یک فاصله‌اند، درنتیجه باهم برابرند.

$$AB = CD \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \Rightarrow \overset{\frown}{AC} + ۳۰^\circ = \overset{\frown}{BD} + ۳۰^\circ$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD} = \alpha$$

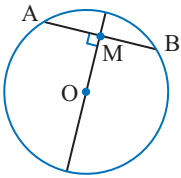
$$۲\alpha + ۳۰^\circ + ۲۱۰^\circ = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۶۰^\circ \xrightarrow{\hat{x}\ \text{مرکزی}} \hat{x} = ۶۰^\circ$$

قضیه: در یک دایره، از دو وتر نابرابر، وتری بزرگ‌تر است که به مرکز دایره نزدیک‌تر باشد و برعکس.



$$AB > CD \Leftrightarrow OH < OH'$$

نتیجه: کوچک‌ترین وتری که از یک نقطه در درون دایره می‌توان رسم کرد وتری است که بر قطر گذرنده از آن نقطه عمود است.

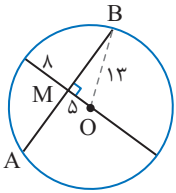


مثال **در دایره‌ای به قطر ۲۶، فاصلهٔ نقطهٔ M تا مرکز دایره برابر ۵ است. طول کوچک‌ترین وتر گذرنده از نقطهٔ M کدام است؟**

۱) ۸
۲) ۱۲
۳) ۱۶
۴) ۲۴

گزینهٔ «۴»

کوچک‌ترین وتر گذرنده از M بر قطر گذرا از M عمود است؛ درنتیجه:



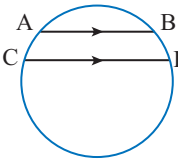
$$\overset{\Delta}{OMB}: MB^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow MB = 12$$

قطر عمود بر وتر، آن وتر را نصف می‌کند، بنابراین:

$$AB = 2MB = 24$$

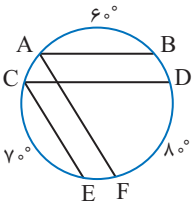
زاویهٔ محاطی: زاویه‌ای که رأس آن روی محیط دایره و ضلع‌های آن دو وتر دایره باشند. اندازهٔ زاویهٔ محاطی برابر نصف اندازهٔ کمان روبه‌رو به آن است.

قضیه: دو وتر که یکدیگر را درون دایره قطع نمی‌کنند، باهم موازی‌اند اگر و تنها اگر کمان‌های محدود بین آن‌ها مساوی باشند.



$$AB \parallel CD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$$

مثال **در شکل زیر، $AB \parallel CD$ و $AF \parallel CE$ است. اندازهٔ زاویهٔ $E\hat{C}D$ چند درجه است؟**



۱) ۵۵ ۲) ۷۵
۳) ۸۵ ۴) ۶۵

گزینهٔ «۴»

$$AB \parallel CD \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD} = \alpha$$

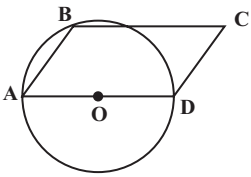
$$AF \parallel CE \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{EF} = \alpha$$

$$3\alpha + 60^\circ + 70^\circ + 80^\circ = 360^\circ \Rightarrow 3\alpha = 150^\circ \Rightarrow \alpha = 50^\circ$$

زاویهٔ $E\hat{C}D$ یک زاویهٔ محاطی است و داریم:

$$E\hat{C}D = \frac{80^\circ + \alpha}{2} = \frac{80^\circ + 50^\circ}{2} = 65^\circ$$

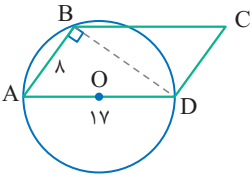
مثال در شکل زیر، ABCD متوازی‌الاضلاع به اضلاع ۸ و ۱۷ است. مساحت متوازی‌الاضلاع کدام است؟



۱) ۹۰
۲) ۱۲۰
۳) ۱۰۰
۴) ۱۴۰

گزینهٔ «۲»

با رسم قطر متوازی‌الاضلاع، زاویهٔ $A\hat{B}D$ محاطی روبه‌رو به قطر دایره می‌شود و داریم:



$$A\hat{B}D = \frac{۱۸۰^\circ}{۲} = ۹۰^\circ$$

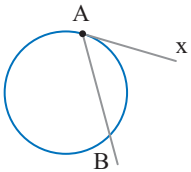
در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{ABD}$ می‌توان نوشت:

$$۸^۲ + BD^۲ = ۱۷^۲ \Rightarrow BD = ۱۵$$

و مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با:

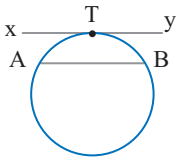
$$S_{ABCD} = ۲S_{ABD} = ۲(\frac{۸\times ۱۵}{۲}) = ۱۲۰$$

زاویهٔ ظلّی: زاویه‌ای که رأس آن روی محیط دایره و یک ضلع آن وتر دایره و ضلع دیگر بر دایره مماس باشد.



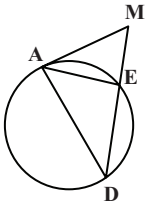
اندازهٔ هر زاویهٔ ظلّی برابر نصف کمان روبه‌روی آن است.

قضیه: اگر وتر AB با خط مماس xy موازی باشد، در این صورت کمان‌های محصور بین آن‌ها برابرند.



$$xy \parallel AB \Rightarrow \overset{\frown}{AT} = \overset{\frown}{BT}$$

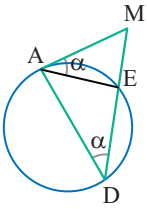
مثال مطابق شکل مقابل، پاره‌خط **MA** در نقطهٔ **A** بر دایره مماس است. اگر $AD=۳$ و $۳ME=۲MA$ باشد، آنگاه **AE** کدام است؟



۱) ۶
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

گزینهٔ «۲»

زاویه‌های $E\hat{A}M$ و $A\hat{D}E$ برابرند، زیرا:



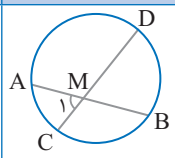
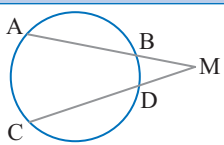
$E\hat{A}M=\frac{\overset{\frown}{AE}}{۲}$ ظلی

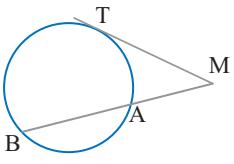
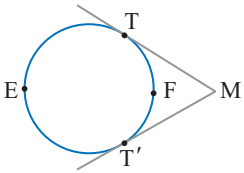
$A\hat{D}E=\frac{\overset{\frown}{AE}}{۲}$ محاطی

بنابراین دو مثلث $\overset{\triangle}{AEM}$ و $\overset{\triangle}{ADM}$ به حالت برابری دو زاویه، متشابه‌اند، پس:

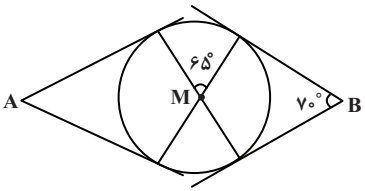
$$\left.\begin{matrix}E\hat{A}M=A\hat{D}E\\ \hat{M}=\hat{M}\end{matrix}\right\}\xrightarrow{(zz)}\overset{\triangle}{AEM}\sim\overset{\triangle}{ADM}$$

$$\Rightarrow\frac{AE}{AD}=\frac{ME}{AM}\xrightarrow[AD=۳]{\frac{ME}{MA}=\frac{۲}{۳}\text{ طبق فرض سؤال}}\frac{AE}{۳}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow AE=۲$$

زاویهٔ بین دو وتر	زاویهٔ بین امتداد دو وتر
	
$\hat{M}_۱=\frac{\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{DB}}{۲}$	$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BD}}{۲}$

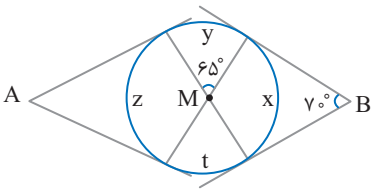
زاویهٔ بین مماس و وتر	زاویهٔ بین دو مماس
	
$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{BT}-\overset{\frown}{AT}}{۲}$	$M=\frac{\overset{\frown}{TET'}-\overset{\frown}{TFT'}}{۲}$

مثال مطابق شکل، خطوط رسم‌شده بر دایره مماس‌اند. زاویهٔ $\hat{A}$ چند درجه است؟



۱) ۵۰
۲) ۶۵
۳) ۵۵
۴) ۶۰

گزینهٔ «۴»



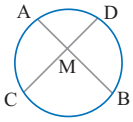
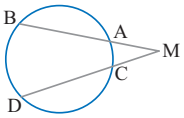
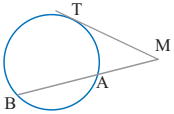
$$۷۰^\circ=\frac{(y+z+t)-x}{۲}\Rightarrow y+z+t-x=۱۴۰^\circ$$

$$\hat{A}=\frac{(y+x+t)-z}{۲}\Rightarrow y+x+t-z=۲A$$

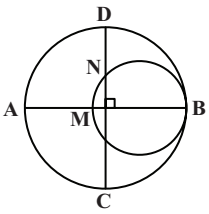
با جمع کردن دو رابطهٔ بالا داریم:

$$\left.\begin{array}{l}۲y+۲t=۲A+۱۴۰^\circ\Rightarrow y+t=\hat{A}+۷۰^\circ\\ ۶۵^\circ=\frac{y+t}{۲}\Rightarrow y+t=۱۳۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{A}=۶۰^\circ$$

رابطه‌های طولی در دایره

رابطهٔ بین وترها	رابطهٔ بین امتداد وترها	رابطهٔ بین مماس و امتداد وتر
		
$MA\times MB = MC\times MD$	$MA\times MB = MC\times MD$	$MT^{2} = MA\times MB$

مثال **در شکل زیر، دو دایره بر هم مماس و قطرهای AB و CD از دایرهٔ بزرگ‌تر برهم عمود هستند. اگر $AM = ۱۶$ ، $DN = ۱۰$ باشد، شعاع دایرهٔ کوچک‌تر، کدام است؟** (ریاضی. خارج ۱۴۰۰)



۱) ۱۲

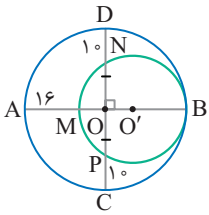
۲) ۱۶

۳) ۱۷

۴) ۲۵

گزینهٔ «۳»

دو قطر AB و CD در نقطهٔ O مرکز دایره بر هم عمودند، اگر O' مرکز دایرهٔ کوچک‌تر باشد، داریم:



$$\begin{cases} R = \text{شعاع دایرهٔ بزرگ} \\ r = \text{شعاع دایرهٔ کوچک} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ON = OP = R - ۱۰ \\ OM = R - ۱۶ \end{cases}$$

با توجه به وترهای متقاطع در دایرهٔ کوچک‌تر داریم:

$$ON\times OP = OM\times OB$$

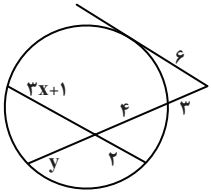
$$\Rightarrow (R-۱۰)\times(R-۱۰) = (R-۱۶)\times R$$

$$\Rightarrow R^{۲} - ۲۰R + ۱۰۰ = R^{۲} - ۱۶R \Rightarrow ۴R = ۱۰۰ \Rightarrow R = ۲۵$$

$$BM = AB - AM \Rightarrow ۲r = ۲R - ۱۶$$

$$\xrightarrow{\div ۲} r = R - ۸ \xrightarrow{R=۲۵} r = ۱۷$$

مثال در شکل زیر، مقدار $\frac{x}{y}$ کدام است؟ «ریاضی ـ اردیبهشت‌ماه ۱۴۰۴»



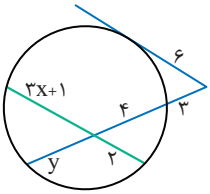
۱) ۰/۳
۲) ۰/۴
۳) ۰/۵
۴) ۰/۶

گزینهٔ «۴»

با توجه به روابط طولی در دایره داریم:

$$۶^۲ = ۳\times(۳+۴+y) \Rightarrow ۳۶ = ۳\times(۷+y) \Rightarrow ۷+y = ۱۲ \Rightarrow y = ۵$$

$$۲\times(۳x+۱) = ۴\times y = ۲۰ \Rightarrow ۳x+۱ = ۱۰ \Rightarrow x = ۳$$



بنابراین حاصل $\frac{x}{y}$ برابر است با: $\frac{x}{y} = \frac{۳}{۵} = ۰/۶$

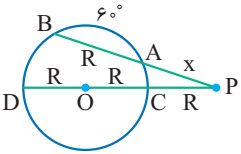
مثال **فاصلهٔ نقطهٔ P تا دورترین نقاط یک دایره سه برابر شعاع دایره است. از این نقطه قاطع PAB نسبت به دایره رسم شده است. اگر کمان AB برابر ۶۰ درجه باشد، اندازهٔ PA چند برابر شعاع دایره است؟**

۱) $\frac{۱}{۲}(\sqrt{۱۱}-۱)$
۲) $\frac{۱}{۲}(\sqrt{۱۳}-۱)$
۳) $\sqrt{۱۱}-۲$
۴) $\sqrt{۱۳}-۲$

گزینهٔ «۲»

$$\overset{\frown}{AB} = ۶۰ \Rightarrow AB = R$$

با توجه به دورترین نقطه نسبت به P (یعنی D) و مقادیر روی شکل داریم:



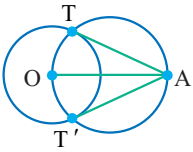
$$PA\times PB = PC\times PD \Rightarrow x(x+R) = R(۳R)$$

$$\Rightarrow x^۲ + Rx - ۳R^۲ = ۰$$

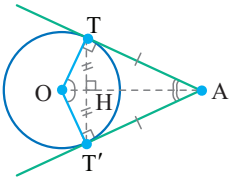
$$\xrightarrow{\Delta = ۱۳R^۲} x = \frac{-R \pm \sqrt{۱۳}R}{۲} \Rightarrow \frac{x}{R} = \frac{۱}{۲}(\sqrt{۱۳}-۱)$$

رسم مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج دایره: از هر نقطه خارج دایره می‌توان ۲ مماس بر دایره رسم کرد.

برای این کار نقطهٔ A را به مرکز دایره وصل کرده و دایره‌ای به قطر OA رسم می‌کنیم. نقاط برخورد دو دایره نقاط تماس هستند.



اگر از نقطهٔ A خارج دایره دو مماس بر دایره رسم کنیم، در این‌صورت داریم:



۱) $AT = AT'$

۲) OA نیمساز زاویه‌های $\hat{A}$ و $\hat{O}$ است.

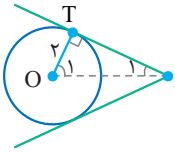
۳) OA عمودمنصف TT' است.

۴) $OT \times AT = TH \times OA$

مثال **دایرهٔ $C(O,2)$ از نقطهٔ A با زاویهٔ ۶۰ درجه دیده می‌شود. اگر مماس AT بر این دایره رسم شود، مساحت مثلث OAT چقدر است؟**

۱) $2\sqrt{3}$ ۲) $4\sqrt{3}$ ۳) $8\sqrt{3}$ ۴) $\sqrt{3}$

گزینهٔ «۱»



$$\hat{A} = 60^\circ \xrightarrow{\text{OA نیمساز}} \hat{A}_1 = 30^\circ \Rightarrow \hat{O}_1 = 60^\circ$$

ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰ درجه نصف وتر است، درنتیجه: $OA = 4$

و ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۶۰ درجه $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتر است و داریم:

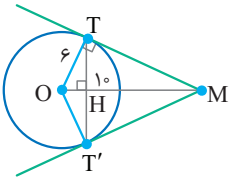
$$AT = \frac{\sqrt{3}}{2}(4) = 2\sqrt{3}$$

$$S_{OAT} = \frac{2 \times 2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

مثال از نقطهٔ M دو مماس MT و MT' را بر دایرهٔ $C(O,۶)$ رسم می‌کنیم. اگر $OM=۱۰$ باشد، طول پاره‌خط TT' کدام است؟

۱) ۹/۶ ۲) ۱۰/۸ ۳) ۷/۲ ۴) ۱۴/۴

گزینهٔ «۱»



$$\overset{\Delta}{OTM}: ۱۰^۲ = ۶^۲ + MT^۲ \Rightarrow MT = ۸$$

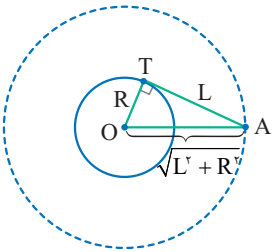
$$OT \times MT = TH \times OM \Rightarrow ۶ \times ۸ = TH \times ۱۰$$

$$\Rightarrow TH = ۴/۸$$

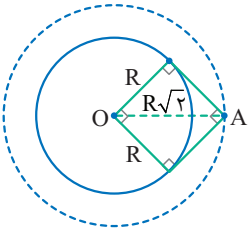
و OM عمودمنصف TT' است، درنتیجه:

$$TT' = ۲(۴/۸) = ۹/۶$$

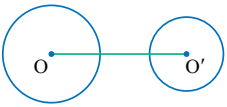
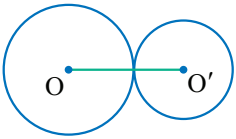
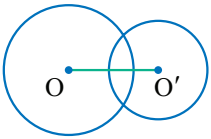
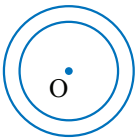
✓ مجموعهٔ نقاطی که از آن نقاط، دو مماس با طول L بر دایرهٔ $C(O,R)$ می‌توان رسم کرد، تشکیل دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\sqrt{L^۲+R^۲}$ را می‌دهند.



✓ مجموعهٔ نقاطی که مماس‌های رسم‌شده از این نقاط بر دایرهٔ $C(O,R)$، بر هم عمود باشند، تشکیل دایره‌ای به مرکز O و شعاع $R\sqrt{۲}$ را می‌دهند.



وضعیت نسبی دو دایره: دو دایره با شعاع‌های R, R' $(R > R')$ را در نظر بگیرید. در این‌صورت دو دایره نسبت به هم یکی از حالت‌های زیر را دارند:

متخارج (برون)	$d > R + R'$	
مماس خارج (مماس برون)	$d = R + R'$	
متقاطع	$R - R' < d < R + R'$	
مماس داخل (مماس درون)	$d = R - R'$	
متداخل	$d < R - R'$	
هم‌مرکز	$d = 0$	

آمار و احتمال

آشنایی با منطق ریاضی

گزاره: جمله‌ای است خبری که می‌تواند درست یا نادرست باشد. جملات پرسشی، امری و... نمی‌توانند گزاره باشند. **ارزش گزاره** یعنی آن گزاره می‌تواند درست (T یا د) یا نادرست (F یا ن) باشد؛ به‌عنوان مثال گزارهٔ «تمام اعداد اول فرد هستند.» نادرست است؛ زیرا ۲ عدد اول است ولی فرد نیست. معمولاً گزاره‌ها را با حروف r ،q ،p و... نشان می‌دهیم.

جدول ارزش گزاره‌ها: با توجه به این‌که هر گزاره دارای ارزش درست یا نادرست است، پس جدول ارزش گزاره‌ها برای n گزاره، طبق اصل ضرب دارای ۲^n سطر می‌باشد. به‌عنوان مثال جدول ارزش گزاره‌ها برای ۲ گزارهٔ p و q به این صورت است:

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

گزاره‌نما: هر جملهٔ خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای‌گذاری مقادیری به‌جای متغیر یا متغیرها به یک گزاره تبدیل شود را گزاره‌نما می‌نامند. گزاره‌نماها را برحسب تعداد متغیرهای به‌کاررفته در آن‌ها، یک‌متغیره، دومتغیره و ... می‌نامیم. به‌عنوان مثال جملهٔ «در پرتاب یک تاس، احتمال آنکه پیشامد A رخ دهد برابر با $\frac{۱}{۲}$ است.» یک گزاره‌نما می‌باشد. اگر مثلاً مجموعهٔ A را به‌صورت $A=\{۱,۳,۴\}$ در نظر بگیریم، گزاره‌نما تبدیل به گزارهٔ درست و اگر مجموعهٔ A را به‌صورت $A=\{۲,۶\}$ در نظر بگیریم، گزاره‌نما به یک گزارهٔ نادرست تبدیل می‌شود.

دامنهٔ متغیر گزاره‌نما: در هر گزاره‌نما به مجموعهٔ مقادیری که می‌توان آن‌ها را به‌جای متغیرهای گزاره‌نما قرار داد تا این‌که گزاره‌نما به گزاره (درست یا نادرست) تبدیل شود، دامنهٔ متغیر گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف D نشان می‌دهند. به‌عنوان مثال، دامنهٔ متغیر گزاره‌نمای «p عددی اول است» مجموعهٔ اعداد طبیعی و دامنهٔ متغیر گزاره‌نمای «$۴x^۲+x-۵=۰$» را مجموعهٔ اعداد حقیقی می‌توان در نظر گرفت.

مجموعه جواب گزاره‌نما: در هر گزاره‌نما، به مجموعهٔ عضوهایی از دامنهٔ متغیر که به‌ازای آن‌ها، گزاره‌نما تبدیل به گزاره‌ای با ارزش درست شود، مجموعه جواب گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف S نمایش می‌دهند و همواره داریم: $S \subseteq D$ مثلاً در گزاره‌نمای «$۴x^۲+x-۵=۰$» دامنهٔ متغیر گزاره‌نما، مجموعهٔ $\mathbb{R}$ و مجموعه جواب آن برابر $S=\{۱,-\frac{۵}{۴}\}$ است.

نقیض یک گزاره: نقیض گزارهٔ p به‌صورت $\sim p$ نوشته می‌شود و آن را «چنین نیست که p» می‌خوانیم. ارزش گزارهٔ $\sim p$ مخالف ارزش گزارهٔ p است. به‌عنوان مثال نقیض گزارهٔ «۳ عددی فرد است.» به‌صورت «چنین نیست که ۳ عددی فرد باشد.» یا «۳ عددی فرد نیست.» خوانده می‌شود. جدول زیر برای نقیض گزاره‌ها کاربردی است. ببینید:

p	است	زوج	گویا	=	>	<	≥	≤
$\sim p$	نیست	فرد	گنگ	≠	≤	≥	<	>

گزاره‌های هم‌ارز: اگر دو گزارهٔ p و q هم‌ارزش باشند، می‌نویسیم: $p \equiv q$ و می‌خوانیم: p هم‌ارز است با q.

به‌عنوان مثال دو گزارهٔ «$\sqrt{3}$ عددی گنگ است.» و «$\sqrt{3}$ عددی گویا نیست.» هم‌ارز هستند.

$\sqrt{3}$ عددی گنگ است $\equiv \sqrt{3}$ عددی گویا نیست

ترکیب فصلی دو گزاره

اگر دو گزارهٔ سادهٔ p و q را با رابط منطقی «یا» ترکیب کنیم، ترکیب فصلی دو گزاره حاصل می‌شود که آن را با نماد $p \vee q$ نشان می‌دهند. ترکیب فصلی $p \vee q$ را

$\downarrow$
فاصل

به‌صورت p یا q می‌خوانیم. جدول ارزش گزارهٔ $p \vee q$ را ببینید:

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

همان‌طور که می‌بینید ترکیب فصلی $p \vee q$ زمانی درست است که حداقل یکی از ۲ گزارهٔ p و q درست باشند و زمانی ترکیب فصلی $p \vee q$ نادرست است که هر دو گزارهٔ p و q نادرست باشند.

ویژگی‌های ترکیب فصلی دو گزاره

۱ $p \vee p \equiv p$

۲ $p \vee q \equiv q \vee p$ (خاصیت جابه‌جایی)

۳ $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ (خاصیت شرکت‌پذیری)

۴ $p \vee \sim p \equiv T$

از بین دو گزارهٔ p و $\sim p$، یکی درست است، پس گزارهٔ $p \vee \sim p$ همواره درست است.

۵ $p \vee T \equiv T$

۶ $p \vee F \equiv p$

ترکیب عطفی دو گزاره

اگر دو گزارهٔ سادهٔ p و q را با رابط منطقی «و» ترکیب کنیم، ترکیب عطفی دو گزاره حاصل می‌شود که آن را با نماد $p \wedge q$ نشان می‌دهند. ترکیب عطفی $p \wedge q$ را

$p \wedge q$
↓
عاطف

به‌صورت p و q می‌خوانیم. جدول ارزش گزارهٔ $p \wedge q$ را ببینید:

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

همان‌طور که می‌بینید ترکیب عطفی $p \wedge q$ زمانی درست است که هر دو گزارهٔ p و q درست باشند و زمانی ترکیب عطفی $p \wedge q$ نادرست است که حداقل یکی از دو گزارهٔ p و q نادرست باشند.

ویژگی‌های ترکیب عطفی دو گزاره

۱ $p \wedge p \equiv p$

۲ $p \wedge q \equiv q \wedge p$ (خاصیت جابه‌جایی)

۳ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ (خاصیت شرکت‌پذیری)

۴ $p \wedge \sim p \equiv F$

از بین دو گزارهٔ p و $\sim p$، یکی نادرست است، پس گزارهٔ $p \wedge \sim p$ همواره نادرست است.

۵ $p \wedge T \equiv p$

۶ $p \wedge F \equiv F$

نکته

ترکیب فصلی دو گزاره ($\vee$) شبیه نماد اجتماع در مجموعه‌ها ($\cup$) و ترکیب عطفی دو گزاره ($\wedge$) شبیه نماد اشتراک در مجموعه‌ها ($\cap$) است و بسیاری از قوانین مجموعه‌ها شبیه به قوانین ترکیب گزاره‌ها هستند. ببینید:

۱ $\begin{cases} p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r) \\ p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r) \end{cases}$ (خاصیت توزیع‌پذیری)

۲ $\begin{cases} p\vee(p\wedge q)\equiv p \\ p\wedge(p\vee q)\equiv p \end{cases}$ (خاصیت جذب)

۳ $\begin{cases} p\wedge(\sim p\vee q)\equiv p\wedge q \\ p\vee(\sim p\wedge q)\equiv p\vee q \end{cases}$ (خاصیت شبه‌جذب)

۴ $\begin{cases} \sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q \\ \sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim q \end{cases}$ (خاصیت دمورگان)

مثال کدام گزاره هم‌ارز منطقی گزارهٔ زیر است؟ (ریاضی ـ دی‌ماه ۱۴۰۱)

$$[\sim p\wedge(\sim q\wedge r)]\vee(q\wedge r)\vee(p\wedge r)$$

۱) q ۲) r

۳) $r\vee p$ ۴) $p\vee q$

گزینهٔ «۲»

$$[\sim p\wedge(\sim q\wedge r)]\vee(q\wedge r)\vee(p\wedge r)\equiv$$
$$[\sim(q\vee p)\wedge r]\vee[(q\vee p)\wedge r]\equiv[\sim(q\vee p)\vee(q\vee p)]\wedge r$$
$$\equiv T\wedge r\equiv r$$

ترکیب شرطی دو گزاره

اگر p و q دو گزاره باشند، ترکیب شرطی دو گزارهٔ p و q را به‌صورت $p\Rightarrow q$ نشان می‌دهیم که در آن p را مقدم و q را تالی می‌گوییم. جدول ارزش ترکیب شرطی دو گزاره به‌صورت زیر است:

p	q	$p\Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

نحوهٔ خواندن ترکیب شرطی دو گزاره یعنی $p\Rightarrow q$:

۱ اگر p آنگاه q.

۲ p شرط کافی برای q است.

۳ q شرط لازم برای p است.

در مورد ترکیب شرطی دو گزارهٔ p و q بدانید

ترکیب شرطی دو گزاره زمانی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد. دقت کنید اگر در یک گزارهٔ شرطی مقدم نادرست باشد، گزارهٔ شرطی به انتفای مقدم درست است؛ یعنی $F \Rightarrow q \equiv T$ و اگر تالی درست باشد، گزارهٔ شرطی همواره درست است؛ یعنی: $p \Rightarrow T \equiv T$

مثال **گزارهٔ $(p \wedge r) \Rightarrow (\sim p \vee \sim q)$، با کدام گزارهٔ زیر، هم‌ارزش است؟**

(ریاضی. خارج ۹۸)

۱) $p \vee (q \wedge r)$ ۲) $p \wedge (q \vee r)$

۳) $r \Rightarrow (p \wedge q)$ ۴) $r \Rightarrow (p \vee q)$

گزینهٔ «۲»

$$(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow (p \wedge r) \equiv \sim (p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge r)$$
$$\equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \equiv p \wedge (q \vee r)$$

نکته

$p \Rightarrow q = \sim p \vee q$

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$p \wedge \sim p \equiv F$

مثال **کدام‌یک از گزاره‌های زیر، هم‌ارز منطقی گزارهٔ $(p \vee q) \wedge (\sim p \Rightarrow \sim q)$ است؟**

(ریاضی. خارج ۹۹)

۱) p ۲) q

۳) $p \wedge q$ ۴) $p \Rightarrow q$

گزینهٔ «۱»

با استفاده از نکتهٔ درس‌نامه داریم:

$$(\sim p \Rightarrow \sim q) \wedge (p \vee q) \equiv (p \vee \sim q) \wedge (p \vee q)$$
$$\equiv p \vee \underbrace{(\sim q \wedge q)}_{F} \equiv p \vee F \equiv p$$

مثال **اگر p گزارهٔ درست، q گزارهٔ نادرست و r گزارهٔ دلخواه باشد، گزارهٔ $(p \Rightarrow r) \Rightarrow (r \Rightarrow q)$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟**

(ریاضی. اردیبهشت ماه ۱۴۰۳)

۱) r ۲) T

۳) $\sim r$ ۴) $\sim T$

گزینهٔ «۳»

با توجه به قوانین هم‌ارزی گزاره‌ها و روابط $p \equiv T$ و $q \equiv F$ داریم:

$$(p \Rightarrow r) \Rightarrow (r \Rightarrow q) \equiv (T \Rightarrow r) \Rightarrow (r \Rightarrow F)$$

$$\equiv (\underset{\downarrow}{\sim T} \vee r) \Rightarrow (\sim r \vee F) \equiv r \Rightarrow \sim r \equiv \sim r \vee \sim r \equiv \sim r$$
$$F$$

مثال **در خصوص گزارهٔ منطقی $((p \Rightarrow q) \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$، کدام مورد صحیح است؟** (ریاضی ـ سراسری ۱۴۰۳)

۱) همواره درست است.

۲) همواره نادرست است.

۳) تنها وقتی درست است که p درست باشد.

۴) تنها وقتی درست است که q نادرست باشد.

گزینهٔ «۱»

روش اول با استفاده از قوانین هم‌ارزی گزاره‌ها داریم:

$$((p \Rightarrow q) \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \equiv \sim ((\sim p \vee q) \wedge r) \vee (\sim p \vee r)$$

$$\equiv (p \wedge \sim q) \vee \underbrace{\sim r \vee (\sim p \vee r)}_{T} \equiv (p \wedge \sim q) \vee T \equiv T$$

روش دوم گزارهٔ $((p \Rightarrow q) \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ تنها در صورتی نادرست است که مقدم آن درست و تالی آن نادرست باشد. از طرفی گزارهٔ $p \Rightarrow r$ در صورتی نادرست است که p درست و r نادرست باشد که در این صورت گزارهٔ $(p \Rightarrow q) \wedge r$ نیز نادرست بوده و ترکیب شرطی به انتفای مقدم درست است، پس گزارهٔ صورت سؤال همواره درست است.

ویژگی‌های ترکیب شرطی دو گزاره

۱ تبدیل ترکیب شرطی به ترکیب فصلی دو گزاره: $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

۲ نقیض ترکیب شرطی دو گزاره: $\sim (p \Rightarrow q) \equiv \sim (\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$

۳ عکس ترکیب شرطی دو گزاره: باید جای مقدم و تالی را عوض کنیم. ببینید:

$$p \Rightarrow q \text{ ترکیب شرطی} \equiv \text{عکس } q \Rightarrow p$$

۴ عکس نقیض ترکیب شرطی دو گزاره: گزارهٔ $\sim q \Rightarrow \sim p$ عکس نقیض ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ است. ببینید:

$$\sim q \Rightarrow \sim p \equiv p \Rightarrow q$$

ترکیب دوشرطی دو گزاره

اگر p و q دو گزاره باشند، گزارهٔ مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را به‌صورت $p \Leftrightarrow q$ می‌نویسیم و آن را ترکیب دوشرطی دو گزاره می‌گوییم. جدول ارزش ترکیب دوشرطی دو گزاره به‌صورت مقابل است:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

بنابراین ترکیب دوشرطی دو گزارهٔ p و q یعنی $p \Leftrightarrow q$ زمانی درست است که هر دو گزارهٔ p و q درست یا هر دو نادرست باشند.

نحوهٔ خواندن ترکیب دوشرطی دو گزاره یعنی $p \Leftrightarrow q$:

۱) اگر p آنگاه q و برعکس.

۲) p شرط لازم و کافی برای q است.

۳) p اگر و تنها اگر q.

مثال **کدام‌یک از گزاره‌های زیر، هم‌ارز منطقی گزارهٔ $p \Leftrightarrow q$ است؟**

(ریاضی ـ سراسری ۹۹)

۱) $(p \wedge q) \vee \sim (p \vee q)$

۲) $(p \vee q) \vee \sim (p \wedge q)$

۳) $(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$

۴) $(p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)$

گزینهٔ «۱»

مطابق نکات درس‌نامه داریم:

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$$

$$\equiv [(\sim p \vee q) \wedge p] \vee [(\sim p \vee q) \wedge \sim q]$$

$$\equiv [(\underbrace{\sim p \wedge p}_{F}) \vee (q \wedge p)] \vee [(\sim p \wedge \sim q) \vee (\underbrace{q \wedge \sim q}_{F})]$$

$$\equiv [(q \wedge p) \vee (\sim p \wedge \sim q)] \equiv [(p \wedge q) \vee \sim (p \vee q)]$$

مثال **کدام گزارهٔ زیر، هم‌ارز منطقی گزارهٔ $q \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ است؟**

(ریاضی ـ سراسری ۱۴۰۱)

۱) p

۲) $p \vee q$

۳) q

۴) $\sim p \Leftrightarrow q$

گزینهٔ «۲»

روش اول اگر q درست باشد، $(\sim p \vee q) \Leftrightarrow q$ هم درست است. حال اگر p درست باشد، گزینهٔ «۴» رد می‌شود و اگر p نادرست باشد، گزینهٔ «۱» رد می‌شود. اگر q نادرست و p درست باشد، باز هم $(\sim p \vee q) \Leftrightarrow q$ درست می‌شود. پس گزینهٔ «۳» هم رد می‌شود و گزینهٔ «۲» درست است.

روش دوم مطابق جدول، گزارهٔ $(\sim p \vee q) \Leftrightarrow q$ هم‌ارز منطقی با گزارهٔ $p \vee q$ است.

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$(\sim p \vee q) \Leftrightarrow q$	$p \vee q$
د	د	ن	د	د	د
د	ن	ن	ن	د	د
ن	د	د	د	د	د
ن	ن	د	د	ن	ن

ویژگی‌های ترکیب دوشرطی دو گزاره

۱ $p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p$ (خاصیت جابه‌جایی)

ترکیب دوشرطی دو گزاره با ترکیب دوشرطی نقیض دو گزاره هم‌ارز است.

۲ $p \Leftrightarrow q \equiv \sim p \Leftrightarrow \sim q$

نقیض ترکیب دوشرطی دو گزاره با ترکیب دوشرطی نقیض یکی از گزاره‌ها با گزارهٔ دیگر هم‌ارز است.

۳ $\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv (\sim p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Leftrightarrow \sim q)$

مثال گزارهٔ $\sim p \Leftrightarrow q$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟ (ریاضی ـ اردیبهشت‌ماه ۱۴۰۴)

۱) $(\sim p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q)$
۲) $\sim [\sim (\sim p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$
۳) $(\sim p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$
۴) $\sim [\sim (\sim p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q)]$

گزینهٔ «۴»

$$\sim p \Leftrightarrow q \equiv (\sim p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow \sim p) \equiv (p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim p)$$

$$\Rightarrow \equiv [\underbrace{p \wedge (\sim q \vee \sim p)}_{p \wedge \sim q}] \vee [\underbrace{q \wedge (\sim q \vee \sim p)}_{q \wedge \sim p}] \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$$

$$\Rightarrow \equiv \sim [\underbrace{\sim (p \wedge \sim q)}_{\sim p \vee q} \wedge \sim (q \wedge \sim p)] \equiv \sim [\sim (\sim p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q)]$$

سورها: به عبارت‌هایی مانند «به‌ازای هر» و «به‌ازای بعضی مقادیر» که می‌توانند قبل از گزاره‌نماها قرار گیرند و به این وسیله گزاره‌هایی با ارزش درست یا نادرست ایجاد کنند، سور می‌گویند. به معرفی «سور عمومی» و «سور وجودی» می‌پردازیم.

سور عمومی: نماد سور عمومی $\forall$ می‌باشد و پشت هر گزاره‌نمایی که قرار بگیرد برای خواندن آن گزاره‌نما (به‌ازای هر) یا (به‌ازای جمیع مقادیر) به کار می‌رود.

نکته

گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور عمومی همراه می‌شود، وقتی به یک گزارهٔ درست تبدیل می‌شود که هر عضو از دامنهٔ متغیر در گزاره‌نما صدق کند؛ به عبارت دیگر هیچ مثال نقضی نداشته باشد.

به‌عنوان مثال گزاره‌نمای $(\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq 0)$ را به‌صورت (به‌ازای هر عدد حقیقی x داریم: $x^2 \geq 0$) می‌خوانیم که یک گزارهٔ درست است، زیرا به‌ازای تمام مقادیر حقیقی x رابطهٔ $x^2 \geq 0$ برقرار است.

سور وجودی: نماد سور وجودی $\exists$ می‌باشد و پشت هر گزاره‌نمایی که قرار بگیرد برای خواندن آن گزاره‌نما (وجود دارد) یا (به‌ازای بعضی مقادیر) و... به کار می‌رود.

نکته

گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور وجودی همراه می‌شود، وقتی درست است که مجموعهٔ جواب آن تهی نباشد.

به‌عنوان مثال گزاره‌نمای $(\exists x \in p; x = \underbrace{2k}_{\text{زوج}})$ (↓ اعداد اول) را به‌صورت (بعضی اعداد اول، زوج هستند.) می‌خوانیم که یک گزارهٔ درست است، زیرا ۲ عددی اول و زوج است، پس مجموعه‌جواب گزاره‌نما $\{2\}$ و ناتهی است.

نقیض سورها: برای ساختن نقیض یک گزارهٔ سوری، سور عمومی را به سور وجودی و سور وجودی را به سور عمومی تبدیل کرده و نقیض گزاره‌نما را جلوی آن می‌نویسیم. ببینید:

$$\sim(\forall x; p(x)) \equiv \exists x; \sim p(x)$$
$$\sim(\exists x; p(x)) \equiv \forall x; \sim p(x)$$

به‌عنوان مثال، نقیض گزاره‌های سوری زیر را می‌نویسیم:

الف) $\exists y \in \mathbb{R}; y < 0 \wedge y^2 \leq 1$

ب) $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq 0$

الف) $\sim(\exists y \in \mathbb{R}; y < 0 \wedge y^2 \leq 1) \equiv \forall y \in \mathbb{R}; \sim(y < 0 \wedge y^2 \leq 1)$

$\equiv \forall y \in \mathbb{R}; y \geq 0 \vee y^2 > 1$

ب) $\sim(\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq 0) \equiv \exists x \in \mathbb{R}; x^2 < 0$

MAZE EDUCATIONAL GROUP
SINCE 1392

ویژهٔ آزمون
۱۵ آبان ۱۴۰۵

فیزیک ریاضی

یازدهم ریاضی

معجزهٔ شب آزمون



SanjeshCloud

بار الکتریکی

پایستگی و کوانتیده بودن بار الکتریکی

اصل کوانتیده بودن بار

تعریف اول: بار الکتریکی جسم همواره مضرب درستی از بار بنیادی (e) است.

تعریف دوم: بار الکتریکی کمیتی گسسته (کوانتیده) است.

اصل پایستگی بار

تعریف اول: در یک دستگاه منزوی، جمع جبری بارهای الکتریکی ثابت می‌ماند.
دستگاهی که با محیط بیرون تبادل بار ندارد، دستگاه منزوی نامیده می‌شود

تعریف دوم: بار الکتریکی به‌وجود نمی‌آید و از بین نمی‌رود، تنها می‌تواند از جسمی به جسم دیگر منتقل شود.

طبق اصل کوانتیده بودن بار الکتریکی می‌توان نوشت:

جسم خنثی الکترون از دست بدهد.
↑
$q = \pm ne \;,\; n = 0,1,2,...$
↓
جسم خنثی الکترون بگیرد.

خواست باشه! اگه بار جسم q باشه، باید نسبت $\frac{q}{e}$ برابر یک عدد صحیح باشه.

روش‌های باردار کردن اجسام

برای انتقال بار به یک جسم سه روش وجود دارد:

۱ مالش
۲ تماس
۳ القا

مالش

با مالش دو جسم خنثی به یکدیگر، تعدادی الکترون از جسمی که الکترون‌خواهی کمتری دارد به جسمی که الکترون‌خواهی بیشتری دارد منتقل می‌شود.

مقدار بار دو جسم خنثی پس از مالش: بار دو جسم ناهم‌نام و اندازهٔ آن‌ها با هم برابر می‌شود.

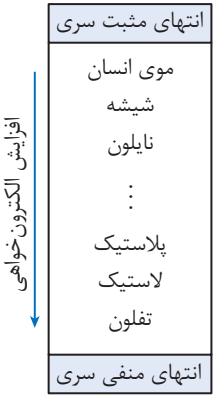
خواست باشه! این روش برای باردار کردن اجسام نارسانا بهترین روشه.

• نکته •

۱ بار اجسام پس از مالش، ناهم‌نام با یکدیگر است، پس نیروی الکتریکی بین آن‌ها **ربایشی** است.

۲ برای باردار شدن دو جسم بر اثر مالش، باید دو جسم جنس مختلفی داشته باشند.

سری الکتریسیتهٔ مالشی (تریبوالکتریک): جدولی برای تشخیص نوع بار اجسام پس از مالش به یکدیگر.



۳ در جدول سری الکتریسیتهٔ مالشی با حرکت به‌سمت انتهای منفی سری، الکترون‌خواهی مواد بیشتر می‌شود. (یعنی توی جدول بار جسم بالایی بعد از مالش مثبت می‌شه و بار جسم پایین‌ترش منفی)

تماس

در این روش یک رسانای خنثی را به یک رسانای باردار تماس می‌دهیم.

مقدار بار دو جسم پس از تماس: اگر دو جسم رسانا با هم تماس پیدا کنند، طبق اصل پایستگی بار الکتریکی، جمع جبری بار آن‌ها قبل و بعد از تماس باهم برابر خواهد بود.

$$\underbrace{q_1+q_2}_{\text{قبل از تماس}} = \underbrace{q'_1+q'_2}_{\text{بعد از تماس}}$$

نکته

۱ اگر دو کرهٔ رسانای مشابه و هم‌اندازه را به یکدیگر تماس دهیم، پس از جدا کردن کره‌ها، بار نهایی دو کره یکسان و برابر است با:

$$q'_1 = q'_2 = \frac{q_1 + q_2}{2}$$

۲ اگر دو کرهٔ رسانا را به یکدیگر تماس دهیم، بار کره‌ها پس از تماس هم‌نام می‌شود و دو کره پس از تماس (به شرط این‌که یکدیگر را خنثی نکنند) یکدیگر را دفع می‌کنند.

خواست باشه! اگه کره‌ها هم‌اندازه نباشن، کره‌ای که بزرگ‌تره، بار بیشتری پیدا می‌کنه.

القا

در این روش بدون تماس اجسام با هم و بر اثر جاذبه یا دافعهٔ الکتریکی، بارهای مثبت و منفی موجود در جسم جابه‌جا می‌شوند و جسم دارای بار خواهد شد.

نکته

جسم القاکننده همواره جسم القاشونده را جذب می‌کند.

کاربردهای الکتروسکوپ

تشخیص باردار بودن جسم

جسم را به کلاهک الکتریسکوپ خنثی نزدیک می‌کنیم ← در صورت باردار بودن جسم، روی کلاهک بار ناهم‌نام با جسم و روی ورقه‌ها بار هم‌نام با جسم جمع می‌شود. ← در نتیجه ورقه‌های الکتروسکوپ به هم نیروی دافعه وارد می‌کنند و از هم فاصله می‌گیرند. (برای این کار از القا کمک گرفتیم.)

نکته

هرچه بار جسم بیشتر باشد، بار القاشده بیشتر است و ورقه‌ها بیشتر از هم فاصله می‌گیرند.

تشخیص رسانایی جسم

جسم خنثی را به کلاهک الکتروسکوپ بارداری تماس می‌دهیم ← در صورت رسانا بودن جسم، بار الکتروسکوپ کاهش می‌یابد ← ورقه‌های الکتروسکوپ به هم نزدیک می‌شوند. ← اگر فاصلهٔ ورقه‌ها تغییر نکند، به معنای نارسانا بودن جسم است.
(برای این کار از تماس کمک گرفتیم.)

تشخیص نوع بار جسم

جسم بارداری را به کلاهک الکتروسکوپ با بار هم‌نام با جسم نزدیک می‌کنیم ← هرچه جسم نزدیک‌تر شود، بار هم‌نام بیشتری به‌سمت ورقه‌ها می‌روند ← ورقه‌ها یکدیگر را دفع می‌کنند ← فاصلهٔ ورقه‌ها به‌طور مرتب افزایش می‌یابد.

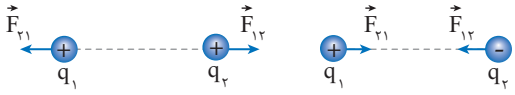
جسم بارداری را به کلاهک الکتروسکوپ با بار ناهم‌نام با جسم نزدیک می‌کنیم ← با نزدیک‌تر شدن جسم به کلاهک، ورقه‌ها ابتدا به هم نزدیک و سپس از هم دور می‌شوند.

قانون کولن

نیروی الکتریکی

اجسام به‌واسطهٔ باردار بودن، یکدیگر را می‌ربایند یا می‌رانند. به این ربایش و رانش، نیروی الکتریکی می‌گویند.

ربایش یا رانشی بودنِ نیروی الکتریکی



بارهای ناهم‌نام یکدیگر را می‌ربایند. بارهای هم‌نام یکدیگر را می‌رانند.

نکته

نیروی الکتریکی وارد بر دو بار الکتریکی، در راستای خط واصل دو بار است و طبق قانون سوم نیوتون این دو نیرو در خلاف جهت یکدیگر و هم‌اندازهٔ یکدیگر هستند.

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \Rightarrow F_{21} = F_{12}$$

تعریف قانون کولن

بزرگی نیروی الکتریکی بین دو بار با حاصل‌ضرب بزرگی بارها نسبت مستقیم و با مربع فاصلهٔ دو بار نسبت عکس دارد و از رابطهٔ زیر قابل محاسبه است:

$$F_{12} = k\frac{|q_1||q_2|}{r_{12}^2}$$

F_{12} : بزرگی نیروی الکتریکی (N)

k: ثابت کولن ($۹\times۱۰^۹ \frac{N.m^2}{C^2}$)

$|q_1|$ و $|q_2|$: اندازهٔ بارها (C)

r: فاصلهٔ دو بار (m)

SanjeshCloud

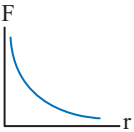
نکته

۱ با توجه به رابطهٔ قانون کولن برای مقایسهٔ دو نیروی الکتریکی می‌توان رابطهٔ نسبتی زیر را نوشت:

$$\frac{F'}{F}=\frac{|q_1'||q_2'|}{|q_1||q_2|}\times(\frac{r}{r'})^2$$

۲ اگر مجموع دو بار الکتریکی **هم‌نام** عدد ثابتی باشد، نیروی الکتریکی بین آن‌ها وقتی بیشینه است که بزرگی بارها یکسان باشد.

۳ نمودار تغییرات بزرگی نیروی الکتریکی دو بار الکتریکی به یکدیگر برحسب فاصلهٔ آن‌ها از هم به شکل زیر است:



۴ در رابطهٔ $F=k\frac{|q_1||q_2|}{r^2}$ اگر اندازهٔ بارها را برحسب μC و فاصلهٔ دو بار را برحسب cm جای‌گذاری کنیم، می‌توانیم مقدار k را برابر ۹۰ قرار دهیم.
(بعضی وقتا توی محاسبات این‌جوری کارمون راحت‌تره.)

۵ ثابت کولن را می‌توان برحسب ثابتی دیگر به نام ضریب گذردهی الکتریکی خلأ (ε_0) نوشت:

$$k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

۶ یکای ضریب گذردهی الکتریکی خلأ، عکس یکای ثابت کولن است:

$$[\varepsilon_0]=\frac{1}{[k]}=\frac{C^2}{N.m^2}$$

برهم‌نهی نیروهای الکترواستاتیکی

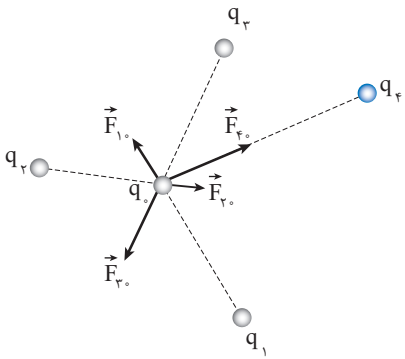
اگر n ذرهٔ باردار در نزدیکی بار نقطه‌ای q_0 قرار داشته باشند، برای محاسبهٔ نیروی خالص (برایند) وارد بر بار نقطه‌ای q_0، مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱ بردار نیرویی را که هر یک از ذره‌ها بر بار q_0 وارد می‌کنند، جداگانه رسم می‌کنیم.

۲ مقدار هر نیرو را به کمک رابطهٔ قانون کولن محاسبه می‌کنیم.

۳ برایند همهٔ بردارهای نیروی به‌دست‌آمده را به‌دست می‌آوریم:

$$\vec{F}_{T_0}=\vec{F}_{1_0}+\vec{F}_{2_0}+\vec{F}_{3_0}+\vec{F}_{4_0}$$



نکته

با توجه به قانون اول نیوتون، اگر برایند نیروهای وارد بر یک ذرهٔ باردار برابر صفر باشد، ذره در تعادل است.

حواست باشه! توی این فصل فقط برایند نیرو توی حالت‌هایی بررسی می‌شه که نیروها توی یه راستا قرار داشته باشن یا به همدیگه عمود باشن.

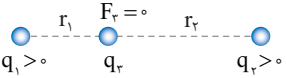
تعادل ذرهٔ باردار، بین دو بار نقطه‌ای

اگر دو ذرهٔ باردار q_1 و q_2 در یک راستا قرار داشته باشند و ما بخواهیم ذرهٔ باردار q_3 را در مکانی قرار دهیم تا نیروی الکتریکی خالص وارد بر آن از سوی دو ذرهٔ باردار دیگر صفر باشد، در دو حالت زیر داریم:

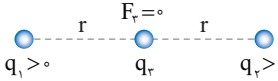
۱ q_1 و q_2 هم‌نام باشند:

بار q_3 در فاصلهٔ بین دو بار، روی خط واصل و نزدیک به باری است که اندازهٔ کوچک‌تری دارد.

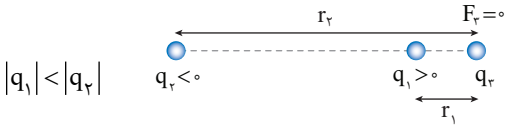
$$|q_1| < |q_2|$$



در این حالت، اگر $|q_1| = |q_2|$ باشد، نیروی خالص وارد بر بار q_3 ، در نقطهٔ وسط فاصلهٔ بین دو بار صفر می‌شود.



۲ q_1 و q_2 ناهم‌نام باشند:



بار q_3 خارج از فاصلهٔ دو بار، روی خط واصل و نزدیک به باری است که اندازهٔ کوچک‌تری دارد.

در این حالت، اگر $|q_1|=|q_2|$ باشد، بار q_3 در هیچ جا در تعادل نیست!

نکته

برای تعادل ذرهٔ باردار q_3 باید شرط $F_{13}=F_{23}$ برقرار باشد، پس می‌توان نوشت:

$$F_{13}=F_{23}\Rightarrow k\frac{|q_1||q_3|}{r_1^2}=k\frac{|q_2||q_3|}{r_2^2}\Rightarrow\frac{|q_1|}{|q_2|}=(\frac{r_1}{r_2})^2$$

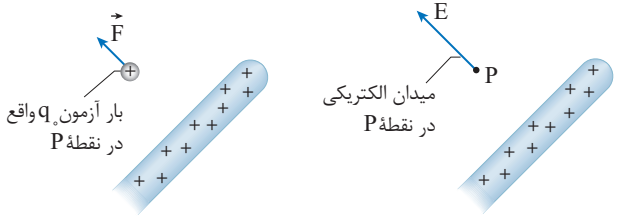
جواب باشه! توی تعادل ذرهٔ باردار q_3 بین دو ذرهٔ باردار، نوع و مقدار بار q_3 هیچ تأثیری نداره.

میدان الکتریکی

تعریف میدان الکتریکی

هر ذرهٔ باردار الکتریکی در فضای پیرامون خود خاصیتی ایجاد می‌کند که به موجب آن بر ذرات باردار دیگر نیروی الکتریکی وارد می‌کند. به این خاصیت میدان الکتریکی گفته می‌شود.

میدان الکتریکی یک جسم باردار در یک نقطه، به کمک نیرویی که این جسم به یک بار کوچک و مثبت (بار آزمون) وارد می‌کند تعیین می‌شود:



$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_{\circ}}$$

$\vec{E}$: بردار میدان الکتریکی $(\frac{N}{C})$

$\vec{F}$: نیروی الکتریکی وارد بر $q_{\circ}$ (N)

$q_{\circ}$: بار آزمون (C)

نکته

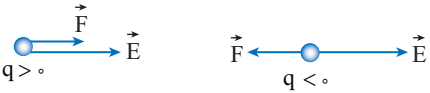
۱ یکای میدان الکتریکی در SI برابر نیوتون بر کولن $(\frac{N}{C})$ است و میدان الکتریکی کمیتی برداری است.

۲ با توجه به رابطهٔ $\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_{\circ}}$ می‌توان دریافت که بردار $\vec{E}$ همواره در راستای بردار $\vec{F}$ است.

۳ گرچه برای تعریف میدان الکتریکی یک جسم باردار از بار آزمون مثبت استفاده کردیم، ولی وجود این میدان مستقل از بار آزمون است. بنابراین، اگر بار الکتریکی ذرهٔ q در میدان الکتریکی $\vec{E}$ ناشی از اجسام باردار دیگری قرار گیرد، این میدان بر آن نیروی $\vec{F}$ را وارد می‌کند. نیروی $\vec{F}$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\vec{F}=q\vec{E}$$

بزرگی این نیرو از رابطهٔ $F=|q|E$ و جهت آن اگر q مثبت باشد، در همان جهت $\vec{E}$ و اگر q منفی باشد، در خلاف جهت $\vec{E}$ خواهد بود.



میدان الکتریکی حاصل از یک ذرهٔ باردار

بزرگی میدان الکتریکی حاصل از ذرهٔ باردار q در فاصلهٔ r از آن از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$E=k\frac{|q|}{r^{2}}$$

E : بزرگی میدان الکتریکی حاصل از بار q $(\frac{N}{C})$

k : ثابت کولن $(\frac{N.m^{2}}{C^{2}})$

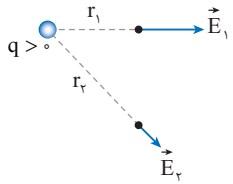
$|q|$: اندازهٔ بار (C)

r : فاصلهٔ نقطه تا ذرهٔ باردار (m)

نکته

۱ بزرگی میدان الکتریکی با اندازهٔ بار q نسبت مستقیم و با مربع فاصله از بار نسبت عکس دارد.

۲ برای مقایسهٔ بزرگی میدان الکتریکی حاصل از بار q در دو فاصلهٔ متفاوت از آن از رابطهٔ نسبتی زیر استفاده می‌کنیم:



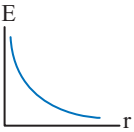
$$\frac{E_۲}{E_۱}=(\frac{r_۱}{r_۲})^۲$$

۳ جهت میدان الکتریکی حاصل از بار q در نقطهٔ A با توجه به علامت بار آن:



جهت میدان به سمت بیرون بار q است. جهت میدان به طرف بار q است.

۴ نمودار بزرگی میدان الکتریکی حاصل از بار q برحسب فاصله تا بار:



مطابق نمودار رسم شده، هرچه از ذرهٔ باردار فاصله می‌گیریم، بزرگی میدان الکتریکی حاصل از آن کاهش می‌یابد.

مثال **بار الکتریکی ذره‌ای $-۵nC$ است. بزرگی میدان الکتریکی این ذره در چه فاصله‌ای برحسب سانتی‌متر، برابر $۱۲۵\frac{N}{C}$ است؟ $(k=۹\times۱۰^۹\frac{N.m^۲}{C^۲})$**

پاسخ مثال به کمک رابطهٔ $E=k\frac{|q|}{r^۲}$، فاصلهٔ نقطه از ذره (r) را حساب می‌کنیم:

$$E=k\frac{|q|}{r^۲}\Rightarrow r^۲=k\frac{|q|}{E}\Rightarrow r=\sqrt{\frac{k|q|}{E}}$$

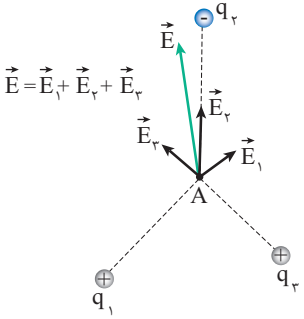
$$\xrightarrow[E=۱۲۵\frac{N}{C}]{|q|=۵nC=۵\times۱۰^{-۹}C} r=\sqrt{\frac{۹\times۱۰^۹\times۵\times۱۰^{-۹}}{۱۲۵}}$$

$$\Rightarrow r=\sqrt{\frac{۹}{۲۵}}=\frac{۳}{۵}m\Rightarrow r=۶۰cm$$

SanjeshCloud

برایند میدان‌های الکتریکی

برای محاسبهٔ میدان الکتریکی خالص حاصل از چند ذرهٔ باردار در نقطه‌ای از فضا، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:



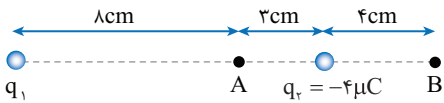
۱ بردار میدان حاصل از هر یک از ذره‌ها در نقطهٔ موردنظر را رسم می‌کنیم.

۲ مقدار هر میدان را به کمک رابطهٔ $E = k\frac{|q|}{r^2}$ به‌دست می‌آوریم.

۳ برایند همهٔ بردار میدان‌ها را محاسبه می‌کنیم.

خواست باشه! مثل نیروی الکتریکی، توی این فصل فقط برایند میدان‌ها توی حالت‌هایی بررسی می‌شه که بردار میدان‌ها در یک راستا یا عمود بر هم باشن.

مثال **در شکل زیر اگر میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ A برابر $\vec{E}=(۶/۲۵\times۱۰^۷\frac{N}{C})\vec{i}$ باشد،**

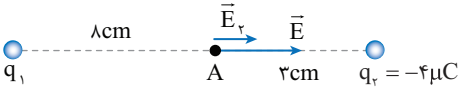


الف) بار q_1 را به‌دست آورید. $(k=۹\times۱۰^۹\frac{N.m^2}{C^2})$

ب) میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ B چند نیوتون بر کولن و در چه جهتی است؟

پاسخ مثال

الف گام اول بردار میدان الکتریکی حاصل از بار q_2 در نقطهٔ A را به‌دست می‌آوریم:



$$E_۲ = k\frac{|q_۲|}{r_۲^۲} \Rightarrow E_۲ = ۹\times۱۰^۹ \times \frac{۴\times۱۰^{-۶}}{۹\times۱۰^{-۴}} = ۴\times۱۰^۷ \frac{N}{C}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_۲ = (۴\times۱۰^۷ \frac{N}{C})\vec{i}$$

گام دوم با داشتن بردار میدان $q_۲$ $(\vec{E}_۲)$ و بردار میدان خالص $(\vec{E})$ می‌توان بردار میدان بار $q_۱$ در نقطهٔ A را حساب کرد:

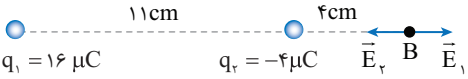
$$\vec{E} = \vec{E}_۱ + \vec{E}_۲ \Rightarrow ۶/۲۵\times۱۰^۷ \vec{i} = \vec{E}_۱ + ۴\times۱۰^۷ \vec{i} \Rightarrow \vec{E}_۱ = (۲/۲۵\times۱۰^۷ \frac{N}{C})\vec{i}$$

گام سوم با توجه به جهت میدان $\vec{E}_۱$، بار $q_۱$ مثبت است و مقدار آن به کمک رابطهٔ $E = k\frac{|q|}{r^۲}$ به‌دست می‌آید:

$$E_۱ = k\frac{|q_۱|}{r_۱^۲} \Rightarrow ۲/۲۵\times۱۰^۷ = ۹\times۱۰^۹ \times \frac{|q_۱|}{۶۴\times۱۰^{-۴}}$$

$$\Rightarrow |q_۱| = ۱۶\times۱۰^{-۶}\,C \xrightarrow{q_۱>۰} q_۱ = ۱۶\mu C$$

ب گام اول میدان الکتریکی حاصل از هر بار را در نقطهٔ B به‌دست می‌آوریم:



$$E_۱ = k\frac{|q_۱|}{r_۱^۲} \Rightarrow E_۱ = ۹\times۱۰^۹ \times \frac{۱۶\times۱۰^{-۶}}{(۱۵\times۱۰^{-۲})^۲} = ۰/۶۴\times۱۰^۷ \frac{N}{C}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_۱ = (۰/۶۴\times۱۰^۷ \frac{N}{C})\vec{i}$$

$$E_۲ = k\frac{|q_۲|}{r_۲^۲} \Rightarrow E_۲ = ۹\times۱۰^۹ \times \frac{۴\times۱۰^{-۶}}{(۴\times۱۰^{-۲})^۲} = ۲/۲۵\times۱۰^۷ \frac{N}{C}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_۲ = (-۲/۲۵\times۱۰^۷ \frac{N}{C})\vec{i}$$

گام دوم بردار میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ B را می‌نویسیم:

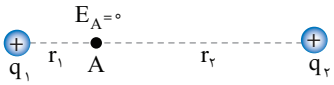
$$\vec{E}=\vec{E}_۱+\vec{E}_۲ \Rightarrow \vec{E}=(۰/۶۴\times۱۰^۷ \vec{i})+(-۲/۲۵\times۱۰^۷ \vec{i})=(-۱/۶۱\times۱۰^۷ \frac{N}{C})\vec{i}$$

میدان الکتریکی خالص در چه نقطه‌ای صفر است؟

۱ دو ذرهٔ باردار هم‌نام q_1 و q_2:

میدان خالص بین دو بار، روی خط واصل و نزدیک به باری که اندازهٔ کوچک‌تری دارد، صفر است.

$|q_1| < |q_2|$



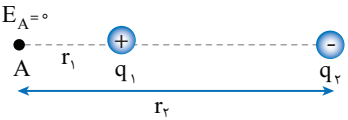
نکته

اگر بار دو ذره هم‌اندازه و هم‌نام باشد، میدان الکتریکی خالص در وسط فاصلهٔ بین دو بار صفر است.

۲ دو ذرهٔ باردار ناهم‌نام q_1 و q_2:

میدان خالص خارج از فاصلهٔ دو بار، روی خط واصل بین دو بار و نزدیک به باری که اندازهٔ کوچکتری دارد، صفر است.

$|q_1| < |q_2|$

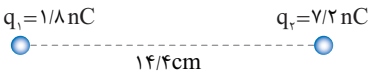


نکته

از آنجا که میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ A در دو حالت بالا صفر است، باید شرط $E_1 = E_2$ برقرار باشد، پس می‌توان گفت:

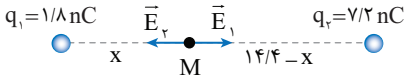
$$E_1 = E_2 \Rightarrow k\frac{|q_1|}{r_1^2} = k\frac{|q_2|}{r_2^2} \Rightarrow \frac{|q_1|}{|q_2|} = (\frac{r_1}{r_2})^2$$

مثال **در شکل مقابل، دو بار نقطه‌ای $q_1 = 1/8nC$ و $q_2 = 7/2nC$ در فاصلهٔ ۱۴/۴ سانتی‌متری از یکدیگر ثابت شده‌اند. میدان الکتریکی خالص در فاصلهٔ چند سانتی‌متری از بار q_2 صفر می‌شود؟**



پاسخ مثال

گام اول بارهای q_1 و q_2 هم‌نام هستند، پس میدان الکتریکی خالص در نقطه‌ای بین فاصلهٔ دو بار و نزدیک به بار کوچک‌تر (q_1)، صفر می‌شود. فاصلهٔ نقطهٔ M تا بار q_1 را x سانتی‌متر در نظر می‌گیریم:



گام دوم میدان الکتریکی خالص صفر است، پس $E_1 = E_2$ می‌شود و داریم:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \cancel{k}\frac{|q_1|}{r_1^2} = \cancel{k}\frac{|q_2|}{r_2^2} \Rightarrow \frac{1/8}{x^2} = \frac{7/2}{(14/4-x)^2}$$

$$\Rightarrow 4x^2 = (14/4-x)^2 \xrightarrow{\text{جذر}} 2x = 14/4 - x$$

$$\Rightarrow 3x = 14/4 \Rightarrow x = 4/8\,cm$$

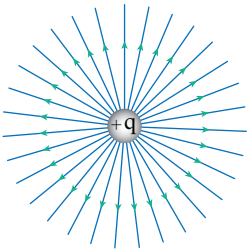
گام سوم فاصلهٔ نقطهٔ M تا بار q_2 برابر است با:

$$14/4 - x = 14/4 - 4/8 = 9/6\,cm$$

خطوط میدان الکتریکی

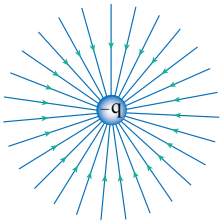
ویژگی‌های خطوط میدان

۱ خطوط میدان الکتریکی در هر نقطه هم‌جهت با بردار میدان الکتریکی در آن نقطه است.



SanjeshCloud

خطوط میدان الکتریکی در جهتِ دور شدن از ذرهٔ باردار $+q$ است.

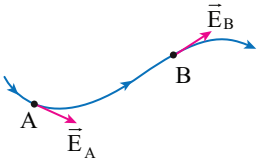


خطوط میدان الکتریکی به سمت ذرهٔ باردار $-q$ است.

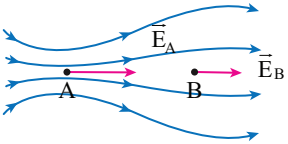
• نکته •

خطوط میدان از بار مثبت خارج و به بار منفی وارد می‌شوند.

۲ بردار میدان الکتریکی در هر نقطه، مماس بر خط میدان عبوری از آن نقطه و هم‌جهت با آن است.



۳ هرجا که خطوط میدان متراکم‌تر باشد، بزرگی میدان بیشتر است.

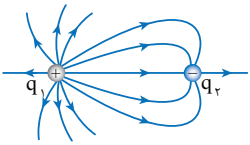


$E_A > E_B$

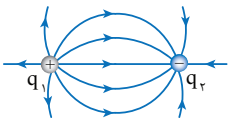
۴ خطوط میدان برایند یکدیگر را قطع نمی‌کنند و از هر نقطه از فضا فقط یک خط میدان الکتریکی می‌گذرد.

خطوط میدان اطراف دو بار نقطه‌ای

۱ دو بار ناهم‌نام:

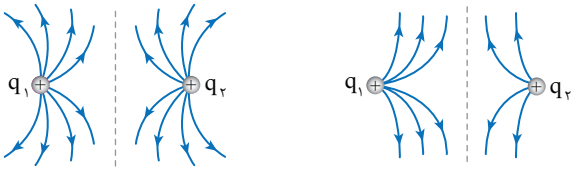


$|q_1| > |q_2|$



$|q_1| = |q_2|$

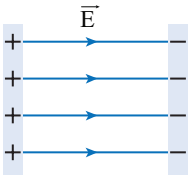
۲ دو بار هم‌نام:



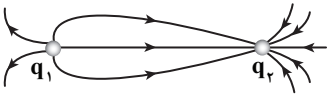
$|q_1| > |q_2|$ $\qquad$ $|q_1| = |q_2|$

میدان الکتریکی یکنواخت

اگر خطوط یک میدان الکتریکی، مستقیم، موازی، هم‌فاصله و هم‌جهت باشند، آن میدان را یکنواخت می‌گوییم.



مثال **در شکل مقابل، خطوط میدان اطراف دو بار الکتریکی q_1 و q_2 رسم شده‌اند:**

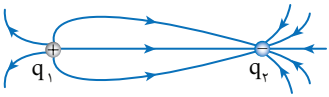


الف) نوع بار q_1 و q_2 را تعیین کنید.

ب) اندازهٔ کدام بار بیشتر است؟ چرا؟

پاسخ مثال

الف همان‌طور که در شکل مشاهده می‌کنید، خطوط میدان از بار q_1 خارج و به بار q_2 وارد می‌شوند، در نتیجه بار q_1 مثبت و بار q_2 منفی است.



ب اطراف بار مثبت، ۵ خط میدان و اطراف بار منفی، ۸ خط میدان کشیده شده، پس میدان اطراف بار q_2 متراکم‌تر و بزرگ‌تر است، پس $|q_1| < |q_2|$ است.

انرژی پتانسیل الکتریکی

- هرگاه ذرهٔ بارداری در یک میدان الکتریکی قرار داشته باشد، انرژی ذخیره‌شده‌ای در ذرهٔ باردار است که به آن انرژی پتانسیل الکتریکی می‌گویند.
- کار نیروی الکتریکی وارد بر ذرهٔ باردار توسط میدان در یک جابه‌جایی مشخص برابر با قرینهٔ تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی ذره در آن جابه‌جایی است:

$$W_E = -\Delta U_E$$

- با حرکت ذرهٔ باردار در یک میدان الکتریکی:

۱) اگر ذره آزادانه در میدان رها شود (بار مثبت در جهت میدان و بار منفی خلاف جهت میدان شروع به حرکت می‌کند):

$$W_E > ۰ \ , \ \Delta U_E < ۰$$

۲) اگر بار مثبت خلاف جهت میدان و بار منفی در جهت میدان جابه‌جا شود:

$$W_E < ۰ \ , \ \Delta U_E > ۰$$

۳) اگر ذره عمود بر میدان جابه‌جا شود:

$$W_E = \Delta U_E = ۰$$

- رابطهٔ کار نیروی الکتریکی روی ذره در میدان:

$$W_E = |q| E d \cos\theta$$

W_E : کار نیروی الکتریکی (J)

$|q|$: اندازهٔ بار (C)

E: اندازهٔ میدان $(\frac{N}{C})$

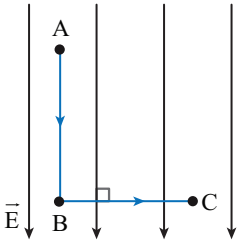
d: جابه‌جایی ذره (m)

θ : زاویهٔ بین بردار نیروی الکتریکی وارد بر ذره و جابه‌جایی

- رابطهٔ تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی:

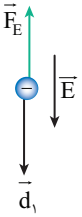
$$\Delta U_E = -|q| E d \cos\theta$$

مثال یک ذره با بار $-6\mu C$ در میدان الکتریکی یکنواخت $E = 3\times10^5 \frac{N}{C}$، مانند شکل از نقطهٔ A به B و سپس از B به C منتقل می‌شود. اگر $AB = 15cm$ و $BC = 10cm$ باشد، تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی این ذره در کل جابه‌جایی چند ژول است؟



پاسخ مثال

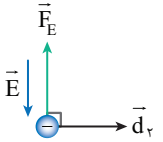
گام اول تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی ذره در مسیر $A \to B$ برابر است با:



$$\Delta U_{E_1} = -|q|Ed_1\cos\theta$$

$$\Rightarrow \Delta U_{E_1} = -6\times10^{-6}\times3\times10^5\times15\times10^{-2}\times\overset{-1}{\cancel{\cos180^\circ}} = 0/27J$$

گام دوم ذره در مسیر $B \to C$، عمود بر میدان حرکت می‌کند. پس زاویهٔ بین نیروی الکتریکی و جابه‌جایی 90° است:



$$\Delta U_{E_2} = -|q|Ed_2\overset{0}{\cancel{\cos90^\circ}} = 0$$

گام سوم حالا که در هر دو مسیر، تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی را یافتیم، با جمع تغییرات، تغییر کل به‌دست می‌آید:

$$\Delta U_E = \Delta U_{E_1} + \Delta U_{E_2} = 0/27 + 0 = 0/27J$$

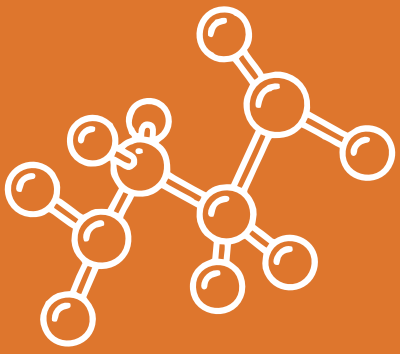
ویژهٔ آزمون
۱۵ آبان ۱۴۰۵

MAZE EDUCATIONAL GROUP
SINCE 1392

شیمی

یازدهم ریاضی

معجزهٔ شب آزمون



SanjeshCloud

سلامی دوباره به یازدهمی‌های عزیز

خب، برگشتیم با یه معجزهٔ شب آزمون دیگه! امیدوارم درس‌نامه‌های قبلی حسابی به کارتون اومده باشن. این بار قراره وارد یکی از جذاب‌ترین بخش‌های فصل اول، یعنی دنیای واقعی واکنش‌ها بشیم.

تا اینجا معمولاً واکنش‌ها رو در شرایط ایده‌آل بررسی می‌کردیم؛ اما دنیای واقعی همیشه اون‌قدرها هم ایده‌آل نیست! گاهی مواد اولیه‌مون خالص نیستن و گاهی هم همهٔ واکنش‌دهنده‌ها به فراورده تبدیل نمی‌شن؛ پس باید یاد بگیریم چطور این شرایط رو در محاسبات شیمیایی درنظر بگیریم و از دل مسئله‌های واقعی، جواب درست رو بیرون بکشیم.

پس این درس‌نامه رو با دقت بخونین که قراره آماده‌تر از همیشه برین سراغ آزمون! (فقط این نکته رو تو پرانتز بگم؛ اگر نیاز به مرور صفحات ۱ تا ۲۲ کتاب درسی برای آزمون داشتید، به معجزه‌های شب آزمون ۱۷ مهر و ۱ آبان مراجعه کنید)

درصد خلوص

واکنش‌دهنده‌های مصرف‌شده در صنعت و آزمایشگاه کاملاً خالص نیستند و علاوه بر مادهٔ مورد نیاز، شامل ترکیبات دیگر نیز می‌شوند. برای بیان **میزان** خالص بودن این مواد، از مفهوم درصد خلوص استفاده می‌شود. درصد خلوص هر ماده از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید:

$$\text{درصد خلوص} = \frac{\text{جرم مادهٔ خالص (g)}}{\text{جرم مادهٔ ناخالص (g)}} \times ۱۰۰$$

برای حل مسائلی که در آن‌ها از مواد ناخالص به‌عنوان واکنش‌دهنده استفاده می‌شود، کافی است از رابطه‌های گفته‌شده برای برقراری ارتباط میان جرم نمونه‌های ناخالص مواد استفاده کنیم. در این رابطه داریم:

جرم مادهٔ ناخالص ⟵ (÷ درصد خلوص ماده) — (× درصد خلوص ماده) ⟶ جرم مادهٔ خالص

به‌عنوان مثال، واکنش $۲A(g)+۳C(g) \rightarrow D(g)+۳B(g)$ را در نظر بگیرید. اگر مقداری مادهٔ A با درصد خلوص x در این واکنش مصرف شده باشد، برای تبدیل جرم این ماده به سایر مواد، ابتدا جرم نمونهٔ ناخالص را به جرم خالص آن ماده تبدیل کرده و پس از آن، صرفاً با استفاده از معادلهٔ واکنش و جرم مولی مواد داده‌شده، محاسبات را پیش می‌بریم. برای مسائل درصد خلوص مانند سایر مسائل استوکیومتری از دو روش زیر استفاده می‌کنیم.

۱ استفاده از ضریب تبدیل مناسب: در این روش، با استفاده از ضرایب موجود در معادلهٔ واکنش، درصد خلوص مواد داده‌شده و چند کسر تبدیل مناسب، مقدار جرم یک ماده را به جرم مادهٔ نهایی تبدیل می‌کنیم:

مثال

$$\text{جرم مادهٔ B} = \text{A جرم ناخالص مادهٔ} \times \frac{\text{درصد خلوص مادهٔ A}}{\text{ناخالص A ۱۰۰g}} \times \frac{\text{B جرم مولی g}}{\text{۱mol B}} \times \frac{\text{ضریب مادهٔ B}}{\text{ضریب مادهٔ A}} \times \frac{\text{۱mol A}}{\text{A جرم مولی g}}$$

۲ استفاده از روش تناسب: در این روش، با استفاده از ضرایب موجود در معادلهٔ واکنش و یک تناسب، جرم مادهٔ داده‌شده را به جرم مادهٔ نهایی تبدیل می‌کنیم.

مثال

$$\text{جرم مادهٔ ناخالص} \xrightarrow{\times \frac{\text{درصد خلوص}}{۱۰۰}} \text{جرم مادهٔ خالص}$$

$$\frac{\text{جرم مادهٔ B}}{\text{جرم مولی B} \times \text{ضریب مادهٔ B}} = \frac{\text{جرم ناخالص مادهٔ A} \times \frac{\text{درصد خلوص مادهٔ A}}{۱۰۰}}{\text{جرم مولی A} \times \text{ضریب مادهٔ A}}$$

بازده درصدی

به **حداکثر** مقدار فراورده‌ای که به شرط مصرف کامل واکنش‌دهنده‌ها قابل تولید است، مقدار نظری می‌گویند. مقدار نظری فراورده‌های تولیدشده در یک واکنش، از محاسبه‌های استوکیومتری به دست می‌آید. در بسیاری از واکنش‌ها، به دلیل انجام برخی از واکنش‌های ناخواسته در کنار واکنش اصلی، مقدار فراورده‌های تولیدشده کمتر از مقدار مورد انتظار می‌شود. به مقداری از فراورده‌ها که به‌صورت عملی در طول واکنش‌های شیمیایی به دست می‌آیند، مقدار عملی می‌گویند.

در چنین شرایطی، مقدار عملی فراورده‌های تولیدشده در واکنش‌ها **کمتر** از مقدار نظری آن‌ها است. شیمی‌دان‌ها برای محاسبهٔ مقدار واقعی فراورده‌های تولیدشده در واکنش‌ها، از مفهوم بازده درصدی استفاده می‌کنند. در واقع، بازده درصدی کارایی یک واکنش شیمیایی را نشان می‌دهد و مقدار آن برابر با نسبت میان مقدار عملی فراورده‌های تولیدشده به مقدار نظری این فراورده‌ها است.

$$\text{بازده درصدی} = \frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}} \times ۱۰۰$$

برای حل مسائلی که در آن‌ها از مفهوم بازده استفاده می‌شود، کافی است از روابط گفته‌شده برای برقراری ارتباط بین جرم مواد استفاده کنیم و درنهایت، جرم فراورده را در مقدار بازده ضرب کنیم. به‌عنوان مثال، در واکنش $۲A(g)+۳C(g)\rightarrow D(g)+۳B(g)$ اگر مقداری مادهٔ A مصرف شده باشد، برای تبدیل جرم این ماده به سایر مواد، ابتدا جرم نظری فراوردهٔ تولیدشده را محاسبه کرده و پس از آن، صرفاً با استفاده از مفهوم بازده درصدی، مقدار واقعی فراوردهٔ تولیدشده را محاسبه می‌کنیم. در این رابطه داریم:

مقدار نظری $\xrightarrow{\text{بازده درصدی} \times}$ مقدار عملی

مقدار عملی $\xrightarrow{\text{بازده درصدی} \div}$ مقدار نظری

برای مسائل بازده درصدی مانند سایر مسائل استوکیومتری از دو روش زیر استفاده می‌کنیم:

۱ استفاده از ضریب تبدیل مناسب: در این روش، با استفاده از ضرایب موجود در معادلهٔ واکنش، درصد خلوص مواد داده‌شده و چند کسر تبدیل مناسب، مقدار جرم یک ماده را به جرم مادهٔ نهایی تبدیل می‌کنیم.

مثال

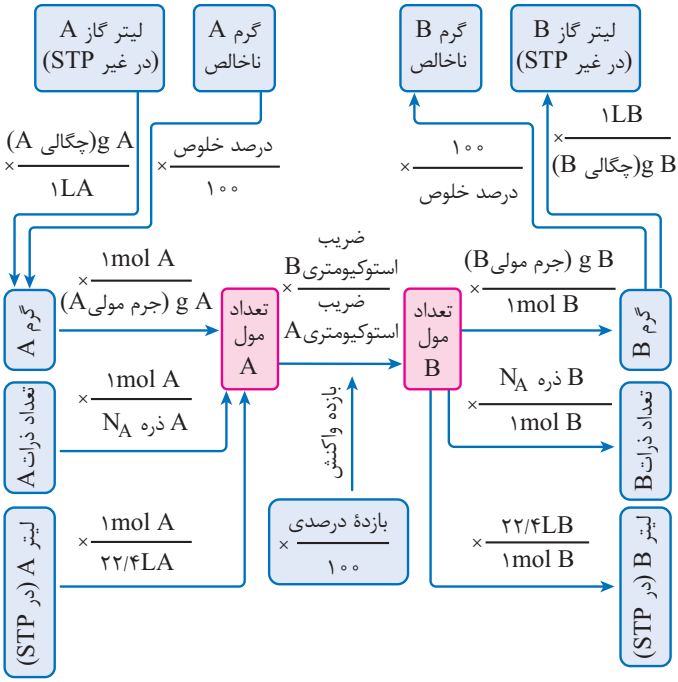
$$\text{جرم مادهٔ B} = \text{جرم مادهٔ A} \times \frac{۱\,\text{mol A}}{\text{A جرم مولی g}} \times \frac{\text{ضریب مادهٔ B}}{\text{ضریب مادهٔ A}} \times \frac{\text{B جرم مولی g}}{۱\,\text{mol B}} \times \frac{\text{بازده درصدی}}{۱۰۰}$$

۲ استفاده از روش تناسب: در این روش، با استفاده از ضرایب موجود در معادله واکنش و یک تناسب، جرم مادهٔ داده‌شده را به جرم مادهٔ نهایی تبدیل می‌کنیم. توجه داریم که کسر بازده فقط در صورت تناسب‌های مربوط به مواد واکنش‌دهنده قرار می‌گیرد. برای مثال داریم:

$$\text{مقدار عملی} = \text{مقدار نظری} \times \frac{\text{بازده درصدی}}{۱۰۰} \longrightarrow$$

$$\frac{\text{ضریب مادهٔ B}}{\text{B جرم مولی} \times \text{ضریب مادهٔ B}} = \frac{\text{بازده درصدی}}{۱۰۰} \times \text{جرم مادهٔ A} \over \text{A جرم مولی} \times \text{ضریب مادهٔ A}$$

الان که درصد خلوص و بازده رو هم یاد گرفتین، مباحث استوکیومتری کنکور براتون تکمیل شد و از الگوریتم زیر برای حل مسائل استوکیومتری می‌تونین استفاده کنین:



معجزهٔ هدف گذاری؛
پیشرفت برق آسا در ۱۴ روز

از هدف گذاری تا یادگیری، مرور و پیشرفت



۱ هدف کوچک، مسیر روشن

با بودجه‌بندی آزمون، هدف این دو هفته‌ات رو مشخص کن.



۲ برنامه‌ای برای حرکت

با برنامه مطالعاتی ماز پیش برو یا برنامه شخصی خودت رو بساز.



۳ یادگیری، هرجا نیاز داری

در بخش کلاس‌ها، آموزش صفر تا صد مباحث رو ببین.



۴ چهارشنبه، دو هفته مطالعه؛ یک روز مرور

با جزوهٔ معجزه شب آزمون، مباحث رو فشرده جمع‌بندی کن.



۵ پنج‌شنبه؛ تمرین قبل از رقابت

پیش‌آزمون تراز: سؤالات کنکور و منتخب سؤالات ماز



۶ جمعه؛ جایگاهت رو بشناس

در آزمون اصلی، رتبه و ترازت رو بین شرکت‌کنندگان سراسر کشور ببین.



۷ کارنامه؛ نقشهٔ قدم بعدی

نقاط قوت و ضعف رو بشناس و برای رسیدن به لیگ بالاتر هدف بذار.



هر آزمون، شروع یک قدم حساب‌شده‌تر

رفع اشکال کن و برای دو هفتهٔ بعد، دقیق‌تر برنامه بریز.



SanjeshCloud